Математическая олимпиада школьников имени Г.П. Кукина

5 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

1. Сумма чисел от 1 до 20 делится на 1,2,3,5,6,7. Удалите не более шести слагаемых так, чтоб новая сумма делилась на 1,2,3,4,5,6. (Пахомова К.Н.)

Ответ. Вариантов несколько. Например, если удалить 11,12,13,17,18,19.

Решение. Сумма 1+2+3+….+20=210. Число, меньшее 210, должно делиться на 1,2,3,4,5,6, т.е. быть кратным 60, значит, это только 60, 120 и 180. Получить 60, удалив не более 6 слагаемых нельзя, а 120 и 180 можно. В первом случае необходимо удалить числа, суммарное значение которых равно 210-120=90. Например, 6 чисел: 11 и 19, 12 и 18, 13 и 17. Во втором случае удаляются те числа, которые в сумме дают 210-180=30. Например, 20 и 10.

2. Эмма записала свою дату рождения в формате ДД.ММ.ГГГГ и заметила, что сумма восьми цифр равна пяти. Когда родился её брат Эмиль, если он младше Эммы на 99 месяцев и сумма цифр его даты рождения, записанная в том же формате, также равна 5? Укажите все возможные варианты. Брат и сестра родились в 21 веке, который начинается 1 января 2001 года. (Пахомова К.Н.)

Ответ. 01.01.2010 или 10.01.2010.

Решение. Брат и сестра родились в одном веке и сумма цифр равна пяти, поэтому Эмма могла родиться в одну из этих дат: 01.01.2001, 10.01.2001, 01.10.2001, 10.10.2001, 01.01.2010, 10.01.2010, 01.10.2010, 10.10.2010.

99 месяцев – это 8 лет и 3 месяца. Если бы Эмма родилась в январе, то сумма цифр даты брата была бы больше пяти. Поэтому она родилась в октябре. Определим теперь год рождения Эмиля.

<u>1-ый вариант:</u> 01.10.2001+8 лет и 3 месяца=01.01.2010, аналогично для 10.10.2001 получаем 10.01.2010. Сумма цифр в каждом из этих случаев равна пяти.

<u>2-ой вариант:</u> 01.10.2010+8 лет и 3 месяца=01.01.2019, аналогично для 10.10.2010 получаем 10.01.2019. Сумма цифр в каждом из этих случаев больше пяти.

3. Петя и Вася пошли на день рождения к своему другу Толе. Толя звал их на 12:00, но друзья перепутали. Петя пришёл, когда до двух часов дня оставалось вдвое меньше, чем прошло после полудня. А Вася – когда до двух часов дня оставалось вдвое больше, чем прошло после 13:00. Кто пришёл раньше? (Штерн А.С.)

Ответ. Оба пришли в 13:20.

Решение. Выясним, когда пришёл Петя к Толе. Между полуднем и двумя часами дня 120 минут. Этот промежуток времени необходимо разделить на 3 части, т.к. до прихода Пети прошло в 2 раза больше, чем от встречи до 14:00. Получаем, что Петя пришел на (120:3)×2=80 минут позже указанного Толей времени, т.е. в 13:20.

Теперь узнаем, когда Вася пришёл к Толе. Промежуток между 13:00 и 14:00 – это 60 минут. Одна часть – это время от часа дня до прихода Васи, время от Васиного времени до 14:00 составляет 2 части, поэтому 60:3=20. Следовательно, Вася пришел в 13:20.

4. По прямой дороге один мотоциклист ехал со скоростью 40 км/ч, а другой 60 км/ч. Они встретились, через некоторое время один развернулся, и через час после встречи они снова встретились. Какое максимальное расстояние между ними было в течение этого часа? (Усов С.В.)

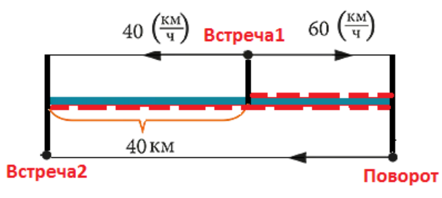
Ответ. 50/3

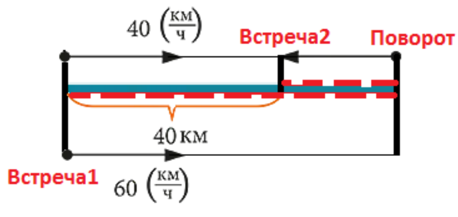
Первое решение.

1. Рассмотрим случай, когда мотоциклисты двигались сначала навстречу друг другу. После встречи они разъехались в противоположных направлениях. За час один мотоциклист проехал 40 км. Второй за этот час проехал, с одной стороны, 60 км, а с другой стороны 40 км+ 2 раза по одному и тому же расстоянию. Тогда это расстояние, то есть путь от места встречи до места разворота, (60-40):2=10км. Наибольшее расстояние между мотоциклистами было в то время, когда один решил повернуть, проехав 10 км, т.е. через 1/6 часа после встречи: (40+60):6=50/3.

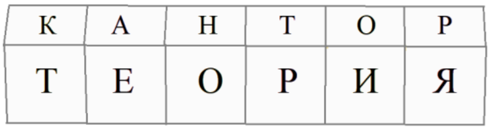
2. Рассмотрим случай, когда мотоциклисты двигались сначала в одном направлении. Мотоциклист с большей скоростью обогнал и продолжил двигаться в том же направление, потом развернулся и стал двигаться навстречу. За час до следующей встречи один мотоциклист проехал 40 км. За это же время другой проехал 60 км. После поворота (60-40):2=10 км и до поворота 40+10=50 км. Наибольшее расстояние между мотоциклистами было в то время, когда один решил повернуть, т.е через 5/6 часа после встречи. Поэтому расстояние в этот момент времени между ними было (60-40)×5:6=50/3.

Второе решение. Мотоциклисты удалялись со скоростью 20 км/ч, а сближались со скоростью 100 км/ч (что в 5 раз быстрее), при этом совместно преодолев одинаковое расстояние. Значит, на сближение потрачено в 5 раз меньше времени, чем на удаление: всего 60 минут = 6 частей времени, значит 1 часть = 10 минут = 1/6 часа они сближались, преодолев за это время 100*(1/6)=50/3 км





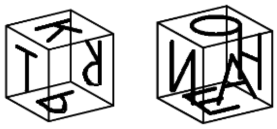
5. Склеили 6 кубиков и сложили их друг за другом так, как на рисунке ниже. Оказалось, что спереди можно прочитать слово «ТЕОРИЯ», а сверху – «КАНТОР»:



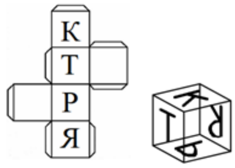
Известно, что на каждой грани кубика была ровно одна буква. Как из кубиков двух типов составить указанную конструкцию? Покажите, как выглядят эти кубики. *Один тип кубиков может отличаться от другого как набором букв на гранях, так и взаимным расположением букв.* (Пахомова К.Н.)

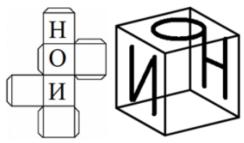
Ответ. Например, как на рисунке.

Решение. Указанные два слова состоят из 9 букв. Рассмотрим крайний слева кубик, 4-й слева и крайний правый. Буквы К, Т, Р, Я могут быть расположены на одном кубике следующим образом.

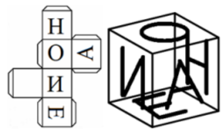


Рассмотрим 3-й и 5-й кубики. Буквы О, Н, И могут быть расположены на одном кубике следующим образом.





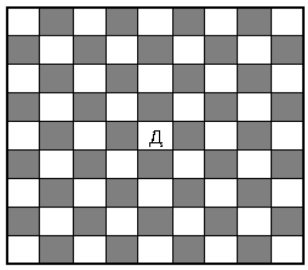
Оставшиеся две буквы разместим на кубике второго вида, т.к. грани, содержащие их, являются соседними.
Все 9 букв размещены на двух кубиках. Возможны и другие варианты расположения.



6. Шахматное королевство – это шахматная доска 9×9, в центральной клетке – дворец. Офицер хвастается, что ему из дворца добежать до дома быстрее, чем доехать на коне. Отметьте все клетки, в которых может жить офицер. *Пешком офицер ходит на любое количество клеток по любой диагонали. Офицер на коне ходит как шахматный конь – буквой «Г», т.е. на две клетки по вертикали и затем на одну клетку по горизонтали или наоборот. Один ход шахматной фигуры занимает одинаковое время.* (Кукина Е.Г.)

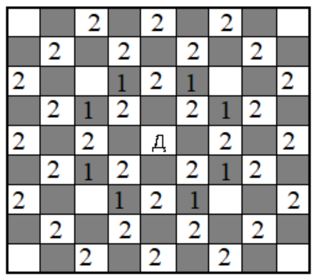
Ответ. Только клетки, находящиеся на главной диагонали, исключая центральную с дворцом.

Решение. Пусть шахматная доска 9×9 такова, что дворец стоит на белой клетке. Тогда из дворца пешком офицеру доступны только белые клетки. Значит, его дом находится на какой-то белой клетке. Дальше будем рассматривать только белые клетки.



Диагональные клетки (кроме дворца) доступны офицеру за 1 ход, а все остальные за 2 хода.

Конь за 1 ход меняет цвет клетки (т.е. за один ход попадает на черную, за два хода на белую и т.д.). Т.е. белые клетки доступны коню за четное число ходов (за 2, 4, …)

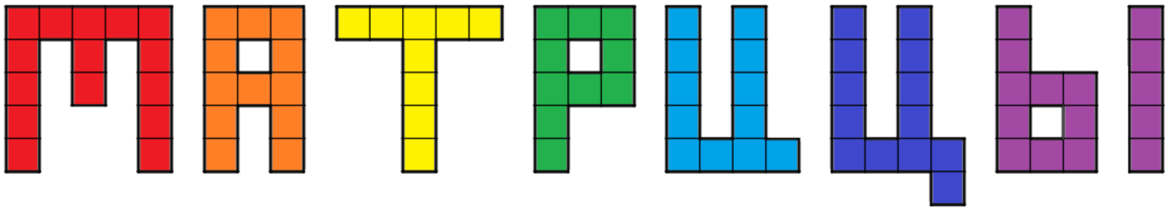


На рисунке отмечено, куда конь может добраться за 1 и 2 хода. До остальных клеток он добирается за большее число ходов.

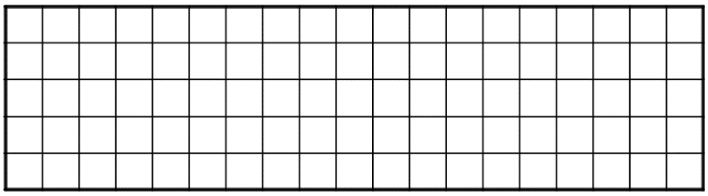
До клеток главных диагоналей конь добирается за 2 и более ходов, а офицер за один ход. До клеток, отличных от клеток главной диагонали, офицер добирается за два хода, но и конь тоже за два. Поэтому офицер может жить на любой клетке главной диагонали, кроме центральной (там дворец).

Решения задач вывода

7. Каждая буква слова «Матрицы» склеена из одинаковых квадратиков так, как показано на рисунке.

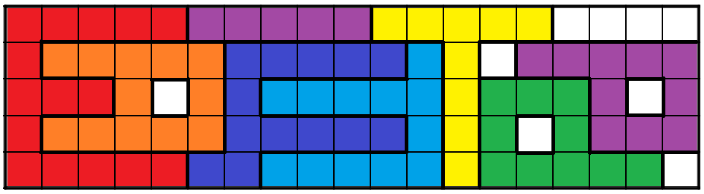


Уложите их все в прямоугольник 5×19 без наложений. Буквы можно поворачивать и переворачивать. (Пахомова К.Н.)

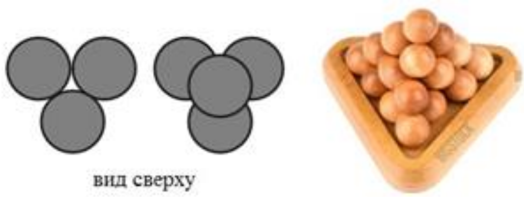


Ответ. Например, как на рисунке.

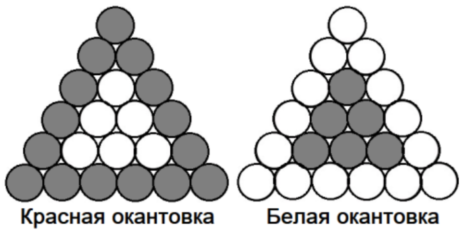
Существуют и другие решения.



8. У Паши было 35 красных и 65 белых шаров. Он строил из них пирамиду следующим образом: в углубление, образованное любыми тремя шарами, сложенными в треугольник, укладывал сверху шар. В верхнем слое оказался один шар, в следующем — три, в следующем — шесть и т.д. Все слои, кроме верхнего — треугольники.

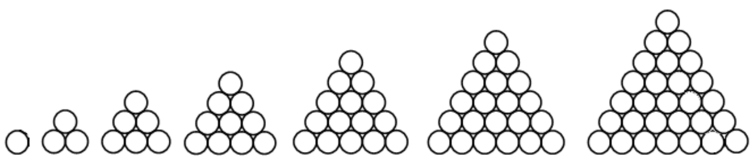


Паша собрал пирамиду из 84 шаров. Каждая её грань — белый треугольник с красной окантовкой в один шар. А ещё Паша хочет сложить из исходного набора шаров пирамиду того же размера, но так, чтобы её грани были красными треугольниками с белой окантовкой. Получится ли у него? (Круглова И.А.)



Ответ. Нет, не получится.

Решение. <u>**1 способ**</u> Изобразим пирамиду послойно: сначала верхний слой, потом следующий и т.д. до нижнего. Замечаем, что число шаров в каждом - это члены последовательности: 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, 1+2+3+4+5=15 и т.д. (это последовательность треугольных чисел)

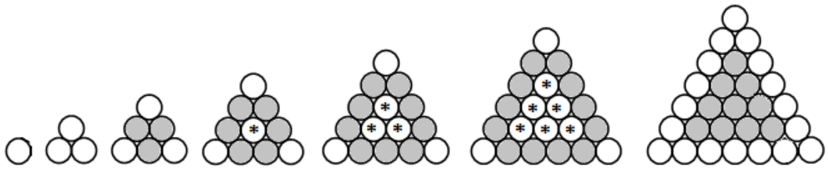


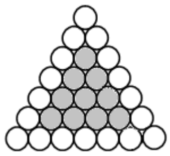
Номер слоя (n)	1	2	3	4	5	6	7

Количество красных шаров в n-м слое	0	0	3	6	9	12	10
Всего шаров в пирамиде из n слоёв	1	4	10	20	35	56	**84**

Всего Паша израсходовал 1+3+6+10+15+21+28=84 шара, поэтому в его пирамиде 7 слоев. Тогда грань пирамиды, т.е. максимальный треугольник, имеет сторону 7. Тогда на треугольники внутри окантовки понадобится (4+3+2+1)·4=40 красных шаров. Но красных шаров только 35, поэтому пирамиду с красными гранями и белой окантовкой Паша сложить не сможет.

2 способ Изобразим пирамиду послойно: сначала верхний слой, потом следующий и т.д. до нижнего. Красные шарики закрашивать. Шарики, которые могут быть как белыми, так и чёрными отметим *. Результаты подсчётов занесём в таблицу.





грань

Номер слоя (n)	1	2	3	4	5	6	7
Количество шаров в n-м слое	1	3	6	10	15	21	28
Количество красных шаров в n-м слое	0	0	3	6	9	12	10
Всего шаров в пирамиде из n слоёв	1	4	10	20	35	56	**84**

Видим, что ровно 84 шарика можно израсходовать только для семислойной пирамиды. В ней красных шариков должно быть не меньше 3+6+9+12+10=40. А у Паши их только 35, поэтому пирамиду с красными гранями и белой окантовкой Паша сложить не сможет.

9. У Чиполлино и Незнайки по одинаковому трёхзначному числу. Чиполлино у себя поставил плюс перед каждой чётной цифрой, а Незнайка – перед каждой нечётной. Вычислив суммы, они обнаружили, что Незнайкина сумма вдвое больше, чем у Чиполлино. Найдите исходное число. (Шаповалов А.В.)

Ответ. 252.

Решение. Заметим, что число не может состоять только из четных или нечётных цифр, т.к. сумма трёх однозначных не может быть равна трёхзначному числу. Аналогично случаи ЧНН и НЧЧ не возможны, т.к. Ч+Н+Н≠2×ЧНН, НЧЧ≠2×(Н+Ч+Ч).

Из условия следует, что Незнайкина сумма является чётной, поэтому ситуаций, когда ЧЧН и ННЧ не может быть, т.к. ЧЧ+Н и Н+НЧ являются нечётными числами, соответственно. Аналогично, случай НЧН невозможен, т.к. НЧ+Н – это нечетное число.

Остается только вариант ЧНЧ. Рассмотрим его: пусть это число $\overline{abc}$, тогда

$$a + \overline{bc} = 2 \times (\overline{ab} + c), a + 10b + c = 20a + 2b + 2c, 8b = 19a + c.$$

Левая часть равенства может принимать значения 24, 40, 56 или 72. Поделим данные числа на 19 и найдем неполное частое и остаток. Подойдут только те значения, в которых оба найденных числа будут четными. Получаем, что 40=19×2+2 и 56=19×2+18. Подходит только первый вариант, ведь нам нужны только однозначные значения. Искомое число 252.

10. По древнему обычаю, узникам предлагают испытание. Их приводят в круглую комнату с дверями. За некоторыми дверями – комнаты принцесс, и если узник угадает такую дверь, он женится на принцессе и станет свободным. За некоторыми – комната с тигром, и узника там ждет верная гибель. А за некоторыми – просто коридоры, ведущие обратно в темницу. Все такие двери в круглой комнате есть. У короля бедного королевства с древних времен есть таблички трех типов:

1. Слева тигр, справа пусто.

2. Слева тигр, справа принцесса.

3. Слева тигр, справа тигр.

Табличка на двери в комнату принцессы оба раза должна говорить правду. Табличка на двери в комнату с тигром оба раза лжет. А табличка на двери коридора один раз говорит правду, а один раз лжет. У бедного короля всего одна дочь, и всего один тигр.

Узника завели в комнату и развязали глаза. Куда ему выходить, чтобы получить свободу? (Кукина Е.Г.)

Ответ. Если две таблички третьего типа, то заходить в комнату с табличкой первого типа, которая правее комнаты с табличкой третьего типа. Если одна дверь с табличкой третьего типа — заходить в комнату через одну дверь от нее вправо.

Решение. В круглой комнате присутствуют все виды комнат: с принцессой, с тигром и пустая. По условию принцесса одна и тигр тоже один.
Рассмотрим дверь, за которой находится принцесса. На ней не может быть таблички 2-го типа, т.к. принцесса только одна, не может быть таблички третьего типа, т.к. тигр только один. Тогда остётся, что на ней может висеть только табличка первого типа «Слева тигр, справа пусто». Поэтому получаем, что левее принцессы находится тигр, а, значит, все остальные комнаты — пустые.
Рассмотрим дверь, за которой находится тигр. Принцесса точно находится правее тигра (ведь тигр точно левее принцессы). Тогда на двери, за которой тигр, не может быть таблички «Слева тигр, справа принцесса», а могут висеть либо табличка «Слева тигр, справа пусто», либо «Слева тигр, справа тигр».
На двери, ведущей в пустую комнату и расположенную левее комнаты с тигром, не может быть ни первой, ни второй таблички, значит, там только третий тип.
Если комнат три, то получаем два варианта расположения табличек.

Если комнат больше, чем три, то на пустых комнатах, кроме соседней с тигром, будет висеть первая табличка. Существуют только два варианта расположения табличек (см. рисунок).

Следовательно, если в круглой комнате две таблички третьего типа, то заходить узнику надо в комнату с 1, которая правее комнаты с 3. Если же одна дверь с табличкой 3 — заходить в комнату через одну от нее вправо.