

5 класс

1. Найдите 4 различные цифры такие, что сумма двух чётных из них вдвое больше суммы двух нечётных, а сумма двух кратных 3 втрое больше суммы двух других не кратных 3.

Решение: Например 1,2,3,6. Действительно $(1+3)*2=2+6$ и $(1+2)*3=3+6$.

2. Мастер делает таблички с буквами. Одинаковые буквы он вырезает за одинаковое время, разные — возможно, за разное. Вывеску ТРИ мастер выполняет за 16 минут, а вывеску ТРИ БЛИНА в 3 раза дольше. За сколько мастер выполнит вывеску ТИР ЛАБИРИНТ?

Решение: ТРИ=ТИР=16 мин, поэтому БЛИНА=32 мин. ТИР ЛАБИРИНТ= ТИР+БЛИНА+ТИР=16+32+16=64 минуты.

3. Какое наименьшее количество ладей необходимо поставить на доску 5×5 (см. рисунок), чтобы отмеченные клетки било ровно столько ладей, сколько отмечено на рисунке? *Считается, что ладья бьет все клетки, которые находятся с ней в одной горизонтали и вертикали.*

	А	Б	В	Г	Д
1					1
2		1			
3					
4				1	
5	1				

Решение: Очевидно, что одна ладья бьет лишь две из представленных клеток, поэтому одной не хватит. А двумя можно обойтись. Например на А1 и Г2.

4. Лыжники Петров и Васечкин двигаются по снегу с одинаковой скоростью. По асфальту Петров двигается вдвое медленнее, а Васечкин — впятеро медленнее, чем по снегу. В воскресенье оба одновременно вышли из дома на олимпиаду. При этом Петров, дойдя до дома Васечкина, дальше пошёл по следу Васечкина и догнал его в конечной точке. Участок асфальта Васечкину встретился только в самом конце пути, а Петров полпути до дома Васечкина шёл по асфальту. Во сколько раз расстояние между домами лыжников длиннее участка асфальта, пройденного

Петровым?

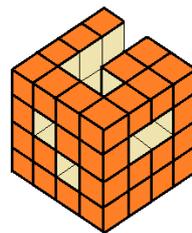
Решение: примем время, требуемое лыжникам на преодоление участка асфальта перед финишем, если бы он был покрыт снегом, за 1 часть. Но он не покрыт снегом, а значит Петров потратил на его преодоление на $5-2=3$ части меньше, чем Васечкин, и эти 3 части он затратил на переход от своего дома до дома Васечкина. Поскольку ровно половину этого пути составляет асфальт (а Петров замедляется на асфальте вдвое), 2 части времени он потратил на участок асфальта между домами (а значит, он той же длины, что и предфинишный) и 1 часть времени - на переход по снегу (опять длина совпадает с предфинишным участком асфальта). Получается, что расстояние между домами в точности равно длине участков асфальта, пройденных Петровым.

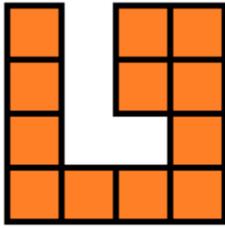
5. На острове рыцарей и лжецов проживает 4050 человек, причем лжецов на 4 меньше, чем рыцарей. Каждый раз в канун нового года жители выстраиваются в круг и каждый должен сказать «справа от меня рыцарь, а слева лжец». Если 2023-м жителям удастся встать в такой круг, то зацветет волшебный лотос. Зацветет ли лотос?

Решение. На острове живет 2023 лжеца и 2027 рыцарей.

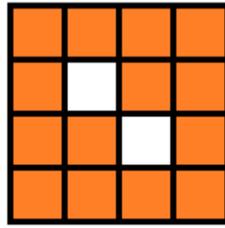
Рассмотрим случай когда в круге стоят только лжецы. Тогда в фразе «справа рыцарь, а слева лжец» первая часть ложь, вторая истина, для того, чтобы фраза была истинной должны выполняться одновременно оба условия, что не происходит, поэтому вся фраза целиком ложь. Противоречия нет. Лотос зацветет.

6. В деревянном кубике размером $4 \times 4 \times 4$ проделали сквозные отверстия, параллельные его ребрам (они показаны на рисунках). Сколько весит полученное изделие, если исходный куб весил 32 кг?

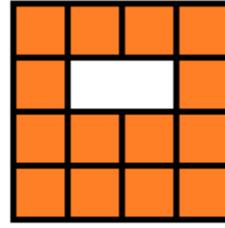




Вид сверху

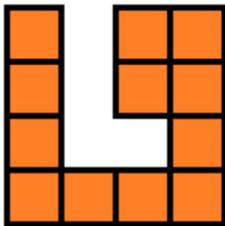


Вид спереди

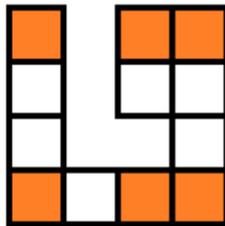


Вид справа

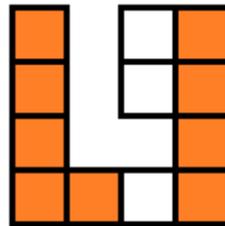
Решение



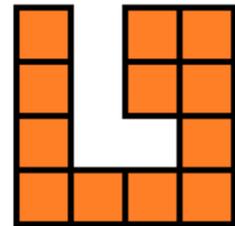
1 слой



2 слой



3 слой



4 слой

Решение: 39 кубиков осталось, $32000 \cdot 39 / 64 = 19500$ г.

7. Найдите наибольшее пятизначное число, в котором средняя цифра равна сумме двух стоящих за ней, а первые две образуют число, равное сумме всех остальных, причём цифры не повторяются.

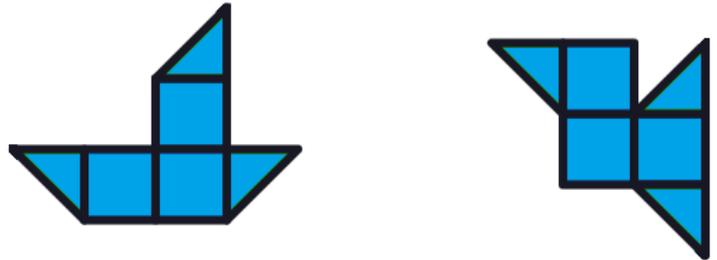
Решение: ответ 18972

Рассмотрим пятизначное $AB\Gamma D$, $AB = B + \Gamma + D = \Gamma + D + \Gamma + D = 2 \cdot (\Gamma + D) = 2 \cdot B$, поэтому наибольшее значение, которое может принимать $AB = 18$ при $B = 9$, $189\Gamma D$. Имеем, что $\Gamma + D = 9$, в разряд десятков берем самую большую цифру из неиспользованных - это 7, $D = 9 - \Gamma = 9 - 7 = 2$, получаем 18972.

8. Можно ли раскрасить числа 1, 2, ..., 10 по 5 штук в синий и красный цвета так, чтобы сумма красных делилась на каждое синее?

Решение. Да, например синие: 1, 2, 3, 4, 9; красные: 5, 6, 7, 8, 10, сумма 36. 36 делится на 1, 2, 3, 4, 9.

9. Отрежьте от левой фигурки цельный кусок и добавьте его к правой фигурке без наложения так, чтобы каждая новая фигура (слева и справа) имела ось симметрии. Кусок, который отрезается, можно поворачивать и переворачивать.



Решение:



10. Три фабрики производили конфеты, работая без выходных. Вторая фабрика каждый следующий день производила на 1 кг конфет больше, чем первая в текущий день, третья – на 2 кг больше, чем вторая, а первая – на 3 кг больше, чем третья. 13 июня 2222 года они произвели по 1 тонне конфет, а сколько кг конфет было произведено 1 января 2222 года на каждой фабрике?

Решение: заметим, что каждые три дня производство на любой фабрике увеличивалось на $1+2+3=6$ кг конфет, а 13 июня это $31+28+31+30+31+13=164$ -й день года, то есть с 1 января прошло 163 дня. $163=3*54+1$ (54 раза по 3 дня плюс еще день). За 162 дня производство увеличилось на $54*6=324$ кг на каждой фабрике, значит 2 января каждая фабрика произвела по 676 кг конфет, а 1 января - 675, 674 и 673 соответственно.