МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ИМЕНИ **Г.П. К**УКИНА

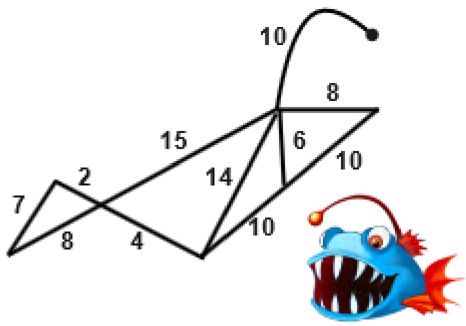
6 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

Решения

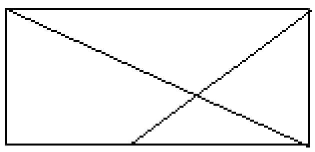
1.(Круглова) Петя хочет нарисовать рыбу-удильщика, не отрывая ручки от листа бумаги (возможно, проводя некоторые линии дважды). Но чернил в ручке хватит только на то, чтобы нарисовать линию длиной не большей, чем 100 см. Сможет ли Петя выполнить задуманное? Длины линий (в см) подписаны на рисунке.



Решение. Да, 10+**6**+10+8+15+8+7+2+4+14+**6**+10=100.

2. (Круглова) Какое наименьшее число прямых линий нужно провести, чтобы на рисунке появилось ровно 6 треугольников?

Решение. Очевидно, что одна прямая не дает нужного результата. Для двух прямых есть пример.



Замечание. Если ребенок САМ не говорит, что одной прямой не достаточно, отправляем его с комментарием «читай внимательно вопрос задачи».

3. (Пахомова) Найдите наибольшее пятизначное число, такое, что сумма любых трёх подряд идущих цифр равна 20 или 22 и все цифры различные.

Ответ. 85967.

Решение. Предположим, что сумма трёх первых цифр равна 20. Если сумма второй, третьей и четвертой цифры тоже равна 20, то четвертая цифра равна первой, что противоречит условию «все цифры различны», значит, суммы чередуются: 20-22-20 или 22-20-22.

Найдем наибольшее пятизначное число, удовлетворяющее схеме 20-22-20. Желательно, чтобы первой цифрой была «9». Тогда четвертая цифра должна быть 9+2=11, что невозможно. Аналогично невозможно, чтобы первой цифрой была «8».

Значит наибольшее пятизначное число, удовлетворяющее схеме 20-22-20, начинается с цифры, не превосходящей «7». Запомним это.

Найдем наибольшее пятизначное число, удовлетворяющее схеме 22-20-22. Первая цифра должна быть наибольшей. Попробуем первую цифру взять «9», тогда сумма второй и третьей цифр равна 13:

9-8-5-7-10 (противоречие),

9-7-6-7, (противоречие)

9-6-7-7 (противоречие)

9-5-8-7-7 (противоречие)

9-4-9 (противоречие)

9-3-10 (противоречие)

Пусть первая цифра «8», тогда сумма второй и третьей цифр равна 14:

8-9-5-6-9 (противоречие)

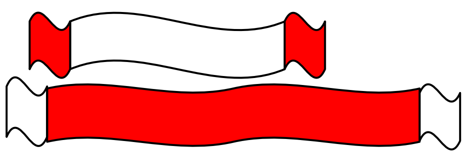
8-7-7 (противоречие)

8-6-8 (противоречие)

8-5-9-6-7 - наибольшее число.

Замечание. В решении участника в полном или разумно-сокращенном виде должен присутствовать перебор для ОБЕИХ конструкций: 20-22-20 и 22-20-22.

4. (Чернявская) Бабушка хотела связать два почти одинаковых шарфа: Герде – белый с красными полосками на концах, а Каю – красный с такими же белыми полосками. Из красной шерсти бабушка вяжет вдвое медленнее, чем из белой. И Кай попросил бабушку связать ему шарф в полтора раза длиннее, чем у Герды. Поэтому на шарф для Кая у бабушки ушло не 4 ч 30 мин, как она планировала, а 7 ч. Во сколько раз больше белой шерсти, чем красной, израсходовала бабушка на шарф для Герды?



Ответ. В 4 раза.

Решение.

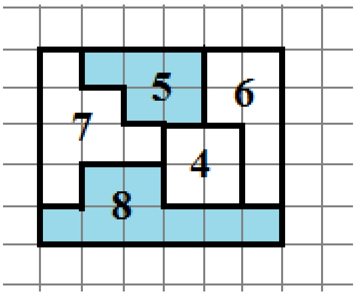
1 способ. Бабушка потратила на удлиненный шарф для Кая на $7-4{,}5=2{,}5$ часа больше времени, чем планировала. За это время она связала половину планируемой длины шарфа и вязала только из красных ниток. Тогда на полный шарф планируемой длины, если бы он был только из красной шерсти, у бабушки ушло бы 5 ч. Но шарф для Кая бабушка предполагала связать за 4 ч 30 мин. Значит, она экономит 30 минут, заменяя часть красной шерсти на белую. Так как красными нитками бабушка вяжет в 2 раза медленнее, значит, она ровно 30 минут вязала бы белой шерстью, а 4 часа – красной. Но тогда то, что связано за 4 часа красными нитками, требует 2 ч =120 мин, если вязать белыми. Значит в шарфе для Герды белой шерсти в 4 раза (120:30=4) больше, чем красной.

2 способ

Бабушка потратила на новый шарф для Кая на $7-4{,}5=2{,}5$ часа больше времени, чем планировала. За это время она связала половину планируемой длины шарфа и вязала только из красных ниток. Тогда на полный шарф планируемой длины, если бы он был только из красной шерсти, у бабушки ушло бы 5 ч. За 5 часов бабушка вяжет шарф первоначальной длины из красной шерсти, значит на 1 час 1/5 красного шарфа или 2/5 белого, т.к. скорость в два раза больше. Бабушка сэкономила 30 минут, заменяя часть красных ниток белыми, это возможно, если 4/5 шарфа она вязала красными нитками, потратив 4 часа и 1/5 белыми, потратив 30 минут.
Для шарфа Герды цвет будет в противоположной пропорции: 4/5 шарфа белыми нитками и 1/5 красными, т.е. белой шерсти было потрачено в 4 раза больше.

5. Разрежьте прямоугольник 6×5 по линиям сетки на пять многоугольников, чтобы их площади выражались пятью последовательными натуральными числами, а периметр каждого многоугольника был ровно в два раза больше его площади.

Решение. Найдем площади нужных многоугольников. Пусть x – площадь многоугольника с наименьшей площадью. Тогда $x+x+1+x+2+x+3+x+4=30$, откуда $x=4$, значит площади многоугольников равны 4, 5, 6, 7, 8. Тогда их периметры 8, 10, 12, 14 и 16 соответственно. На рисунке приведен пример возможного разрезания.



Замечание. Участнику достаточно привести любой верный пример разрезания, не объясняя, как он был получен. В свою очередь, принимающему члену жюри нужно следить, чтобы ВСЕ условия были выполнены. Периметры многоугольников можно контролировать, мысленно «вписывая» клетчатый многоугольник в прямоугольник с тем же периметром: 8 – 2×2, 10 – 2×3, 12 – 2×4, 14 – 3×4, 16 – 2×6.

6. (Круглова) В верном примере на сложение цифры заменили буквами и получили:

$$\begin{array}{r} \text{КОТ} \\ +\ \text{ПЕС} \\ \hline \text{ДРУГ} \end{array}$$

Найдите число ДРУГ, если известно, что ДРУГ делится на 18, ПЕС **не** делится на 3, 5, 7, а КОТ составлен только из нечетных цифр.
Разными буквами обозначены разные цифры.

Ответ. 1026.

Решение. Очевидно, что Д=1. Так как ДРУГ делится на 18, то последняя цифра четная, значит, в слове ПЕС на последнем месте стоит нечетная цифра. Итого – 5 нечетных цифр. Значит Р, У, Г – четные.

Рассмотрим делимость на 18: число делится на 9, сумма цифр (при условии, что первая 1 и все четные) может быть или 9, или 18, второе невозможно, так как в нашем случае сумма трех четных чисел будет равна 17 – нечетное число. Итак, ДРУГ – число вида 1ЧЧЧ, с суммой цифр 9: из четных цифр 0, 2, 4, 6, 8 только тройка 0, 2, 6 дает в сумме 8. Оставшиеся две четные цифры 4, 8 входят в слово ПЕС.

ПЕС последняя цифра нечетная. ПЕС не делится на 3, следовательно, нельзя брать 483 (843) и 489 (849). ПЕС не делится на 5, следовательно, последнее цифрой не может стоять 5: 485 (845). Итак, последняя цифра 7. Очевидно, что 847 делится на 7, т.е. ПЕС может принимать только значения 487.

Оценим сумму последних цифр С+Т: во всех случаях 7+ (3, 5, 9) дает число не меньше, чем 10, поэтому 9 на месте Е быть не может (разрядная единица +1 приводит к повторению числа). Так же в числе КОТ первая цифра не может быть 3, так как сумма КОТ+487 не будет четырехзначной. Тогда КОТ – это 539, 935 или 953.

Простым перебором для каждого случая из трех получаем 487+539=1026.

Вывод 7. (Шаповалов) В полдень из разных мест стартовали два гонца. Они движутся по одной прямой дороге, каждый со своей постоянной скоростью. В 1 час дня между ними было расстояние 1 верста, в 2 часа - 4 версты, в 3 часа - 9 вёрст. Найдите расстояние между местами старта.

Ответ. 6 верст.

Решение. Будем смотреть глазами первого гонца. Если бы второй шел все время ко мне, то расстояние между нами постоянно уменьшалось бы. Это не наш вариант. Если второй постоянно шел бы от меня, то расстояние между ними за каждый час увеличивалось бы на одно и то же значение. Вывод: второй гонец идет ко мне, проходит мимо и идет дальше. Если бы встреча произошла на первом часу пути, то за второй и за третий час было бы одинаковое удаление. А это не так. Значит, встреча произошла на втором часу пути. Итак, первый час мы постоянно сближались, второй час сначала сближались, потом начали начал отдаляться. В третий час он постоянно отдалялся. За третий час пути второй отдалился на 5 верст. Значит, за первый час пути он точно также приблизился на 5 верст. Ответ: вначале между нами было расстояние 6 верст.

Вывод 8. (Круглова)

На праздник каждый должен был прийти с одним воздушным шаром, рыцари выбрали красный цвет, лжецы синий, а хитрецы желтый. В финале праздника все выпустили веревочки, и небо украсили 30 шаров всех трех цветов!
20 человек воскликнули: «Синих шаров больше всех!»
7 других человек прокричали: «Красных шаров больше всех!»
А еще 3 человека кричать не стали, но произнесли: «Желтых и синих шаров поровну».
Сколько красных шаров было в небе?

Рыцари говорят только правду, лжецы всегда лгут, а хитрецы могут говорить как ложь, так и правду.

Ответ. В небе 2 красных шара.

Решение.

Любую фразу не могут произносить одновременно рыцарь и лжец, так как иначе их слова будут противоречить друг другу.

Фраза «синих шаров больше» эквивалентна «лжецов больше». Фраза не может быть истиной, так как в этом случае лжецов действительно больше, но произносят фразу рыцари или хитрецы, следовательно, лжецов остается 10, значит либо рыцарей и хитрецов поровну, либо кого-то больше 10. Противоречие.

Итак, фраза «синих шаров больше» - ложь и произносят ее лжецы и хитрецы.

7 человек, кричащих «красных шаров больше!» (т.е. рыцарей больше) тоже не могут быть правы, так как рыцарей не больше 10 по предыдущему выводу.

Итак, фраза «красных шаров больше» - ложь и произносят ее лжецы и хитрецы.

Так как в небе оказались шары всех трех цветов, рыцари могут находиться только среди людей, произнесших третью фразу, следовательно, она истина и «желтых и синих шаров поровну». Т.е. хитрецов и лжецов поровну. Все лжецы среди высказавших 1 и 2 фразу, хитрецы могут оказаться и среди последних трех говоривших. 20+7=27 – нечетное число, среди последних трех говоривших 1 или 3 хитрецы, последнее не возможно.

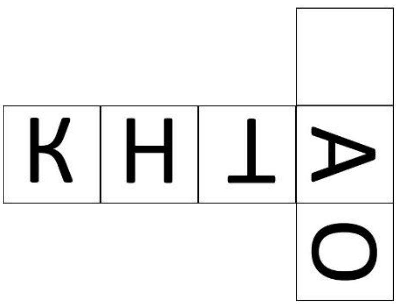
Итак, получаем, 2 рыцаря, 14 лжецов и 14 хитрецов.

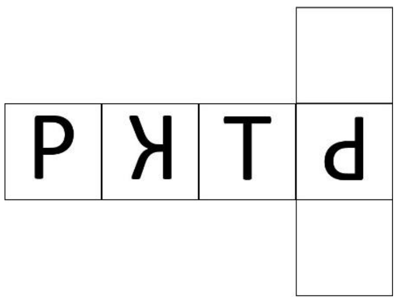
Вывод 9. (Пахомова, Кукина)

Кубики расположили так, как показано на рисунке. Если читать то, что написано, выйдет «Кантор», а если перевернуть башню вверх ногами – получится «картон». Какое наименьшее количество типов кубиков понадобится для такой сборки? *Один тип кубиков может отличаться от другого как набором букв на гранях, так и взаимным расположением букв.*

Ответ: понадобится 2 типа кубиков.

Решение. Букв у нас 6. Если бы хватило одного типа кубика, каждая буква на таком кубике встречалась бы по одному разу. И к «клюву» буквы К должна прилипать буква Н, судя по верхнему кубику (КН). Если судить по нижнему, то к «клюву» буквы К должна прилипать буква Ь. Значит, одного типа кубика не хватит.





Двумя обойтись можно.

Примечание: противоречие можно найти не только в букве К, но и в букве Т. С одной стороны, справа от Т должна быть Н, а судя по другому кубику, справа от Т должна быть перевернутая Р.

Вывод 10. (Боярников)

Женя и Саша играют в игру с фишками на клетчатой доске 8×8. В свой ход каждый может сделать одно из действий: передвинуть выбранную фишку по диагонали, или же любые две фишки, являющиеся вершинами прямоугольника со сторонами параллельными сторонам доски, можно переместить в две другие вершины этого прямоугольника (если это возможно). Во время игры Саше пришлось отойти, а когда он вернулся, то увидел на доске следующую позицию (рис 1.). Саша не помнит предыдущие позиции, однако начальная у него записана (рис 2.). Он уверен, что Женя сжульничал. Прав ли Саша?

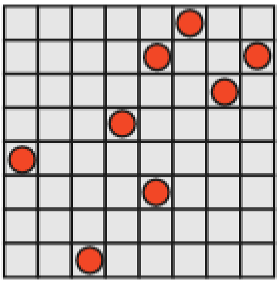


Рисунок 1

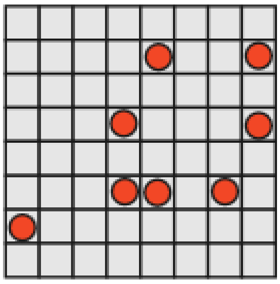
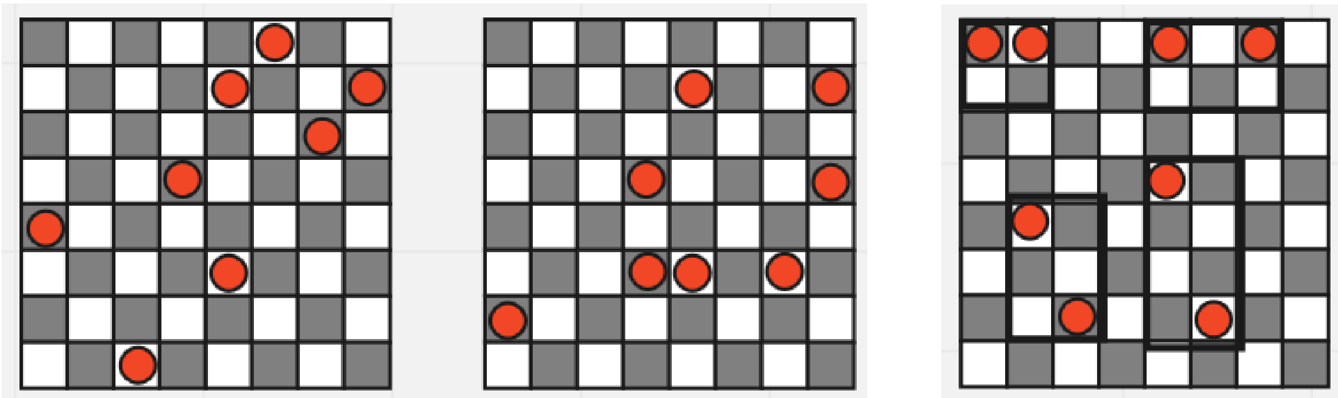


Рисунок 2

Решение.

Приведем клетчатую раскраску



Обратим внимание, что движение по диагонали не меняют цвет клетки. Рассмотрим варианты изменения вершин прямоугольника. В любом случае, либо фишки меняются местами, и число фишек на закрашенных клетках остается таким же, либо два закрашенных поля меняется на два белых (или наоборот), тогда число фишек на закрашенных клетках изменяется на ± 2. Четность фишек, стоящих на закрашенных клетках сохраняется.

Но на первом рисунке на закрашенных клетках стоит 4 фишки, а на втором 5 – четность изменилась. Полученное противоречие доказывает правоту Саши.