

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА**

7 класс

г. Омск

*Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина,  
создателя системы городских математических олимпиад.*

1. (Пахомова) Найти какое-нибудь решение ребуса  $1/ДЕ+1/ВЯ+1/ТЬ=1/9$

**Решение:**  $1/18+1/27+1/54=1/9$  подходит.

**Критерии:** верный пример 7 баллов. Неверный 0.

2. (Шаповалов) В полдень из разных мест стартовали два гонца. Они движутся по одной прямой дороге, каждый со своей постоянной скоростью. Через 1 час между ними было расстояние 1 верста, через 2 часа - 4 версты, через 3 часа - 9 вёрст. Найдите расстояние между местами старта.

**Ответ:** 6 верст

**Решение.** Будем смотреть глазами первого гонца.

Если бы второй шел все время ко мне, то расстояние между нами постоянно уменьшалось бы. Это не наш вариант.

Если второй постоянно шел бы от меня, то расстояние между ними за каждый час увеличивалось бы на одно и то же значение.

Вывод: второй гонец идет ко мне, проходит мимо и идет дальше. Если бы встреча произошла на первом часу пути, то за второй и за третий час было бы одинаковое удаление. А это не так. Значит, встреча произошла на втором часу пути.

Итак, первый час мы постоянно сближались, второй час сначала сближались, потом начали начал отдаляться. В третий час он постоянно отдалялся.

За третий час пути второй отдалился на 5 верст. Значит, за первый час пути он точно также приблизился на 5 верст. Ответ: вначале между нами было расстояние 6 верст.

**Критерии.** Правильное решение 7 баллов. Если не обосновано, что встреча произошла на втором часу пути, а это принято без рассуждений – снять 2 балла. Так же снять два балла если один из случаев (едут навстречу, быстрый догоняет медленного) не упомянут. За частные случаи со скоростями и т.д. – 1 балл.

3. (Кукина) На поле чудес провели три длинные прямые борозды, которые образуют треугольник. Буратино сбегал к одному пересечению, измерил угол,

сбегал к другому, измерил, сбегал к третьему. Потом три полученных угла сложил. И говорит, что сумма углов в этом треугольнике 140 градусов. Пьеро знает, что сумма углов не может быть равна 140 градусов, но утверждает, что один-то угол он найти может! Прав ли Пьеро? Если да, найдите этот угол. Если нет, докажите свой ответ.

**Ответ:** да, он прав. Один из углов треугольника 110 градусов.

**Решение:** понятно, что произошло. Один или несколько раз Буратино измерил не внутренний угол треугольника, а внешний.

Если бы Буратино измерил все три внешних, то их сумма оказалась бы 360 градусов. Это не наш вариант.

Пусть два угла треугольника А и В Буратино заменил на смежные. Тогда сумма новых углов была бы  $(180-A)+(180-B)+C=360-(A+B+C)+2C=180+C$ . И была бы больше 180 градусов.

Значит, путаница произошла только одна. (Т.к. сумма углов уменьшилась, какой-то тупой угол заменили на острый -- но это не очень важное замечание). Итак, Буратино посчитал не сумму углов треугольника (которая, конечно, 180 градусов), а 2 внутренних угла и третий – внешний. Внешний угол при третьей вершине равен сумме двух внутренних. Т.е. сумма двух внутренних 70 градусов. Следовательно, третий внутренний – 110 градусов.

**Критерии.** Правильное решение 7 баллов. Если в решении без обоснования утверждается, что путаница произошла ровно одна – не более 3 баллов.

4. (Штерн) Число называется привлекательным, если оно равно сумме самого большого своего делителя (отличного от самого себя) и некоторого простого числа. Сколько различных делителей может иметь привлекательное число?

**Ответ:** 2, 3 или 4 различных делителя.

**Решение.** Пусть число нечетное. Тогда все его делители нечетные. Пусть М его наибольший делитель, а С наименьший (т.е. само число равно МС). Тогда  $M+p=MC$ . Если р это не двойка, то р нечетное. И тогда  $M+p$  должно быть четное. Противоречие. Значит,  $p=2$ . Тогда  $M(C-1)=2$ . Тогда М – делитель двойки (и притом нечетный. Т.е.  $M=1$ ,  $C=3$  (а само число 3 и у него 2 различных делителя: 1, 3).

Теперь пусть число четное. Тогда его минимальный делитель двойка, а его максимальный делитель обозначим М (само число = 2М). Но тогда  $M+p=2M$ . Поэтому  $M=p$  (т.е. М – простое число). Итого, привлекательное число (кроме тройки) имеет вид  $2p$  (где р – простое). И у него либо 4 различных делителя (1, 2, р, 2р), либо 3 (если  $p=2$ , само число равно 4, делителей у него 3: 1, 2, 4).

**Критерии.** Правильное решение, конечно, 7 баллов.

Упущен случай 3 разных делителей – снять 2 балла.

Разобран только случай четного числа – 2 балла.

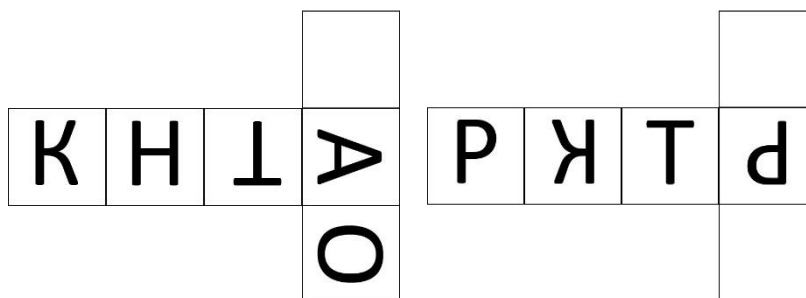
5. (Пахомова-Кукина) Кубики расположили так как показано на рисунке. Если читать то, что написано, выйдет «Кантор», а если перевернуть стопку вверх ногами – получится «картон». Вопрос: какое минимальное количество типов кубиков понадобится для такой сборки?



**Ответ:** понадобится 2 типа кубиков.

**Решение.** Букв у нас 6. Если бы хватило одного типа кубика, каждая буква на таком кубике встречалась бы по одному разу. И к «клюву» буквы К должна прилипать буква Н, судя по верхнему кубику (КН). Но судя по нижнему, то должна прилипать буква Ъ. Значит, одного типа кубика не хватит.

А вот двумя можно обойтись.



Примечание: противоречие можно найти не только в букве К, но и в букве

Т. С одной стороны, справа от Т должна быть Н, а судя по другому кубику, справа от Т должна быть перевернутая Р.

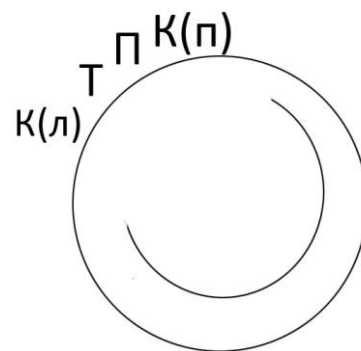
**Критерии:** Оценка (что 1 кубика не хватит) 3 балла. Пример (что 2 типов кубиков хватит) 3 балла. Понимание того, что требуется и то, и другое – 1 балл.

6. (Мещеряков+Кукина) Узника привели в комнату. И он сразу увидел дверь с табличкой “Слева тигр, справа коридор”. На соседней двери была табличка “Слева Принцесса, справа тигр”, а на соседней с ней – “слева коридор, справа принцесса”. На всех остальных дверях таблички как одна из таких. За одной из дверей – принцесса, и оба утверждения на табличке верные. За одной дверью тигр, и оба неверные. А за остальными дверями коридоры, которые ведут обратно в темницу, и одно утверждение верное, а другое нет. Узник говорит: “Я не могу сказать, за какой дверью принцесса. Но скажи, король, можно ли вот на этой двери поменять табличку?” (с сохранением условий). Король ему ответил, и узник нашел принцессу. Вопрос: за какой дверью принцесса?

**Ответ:** принцесса либо в первой попавшейся двери (первой попавшейся на глаза по условиям), либо в соседней справа от нее. (Это узник однозначно узнает в зависимости от того, куда он указал, и что король ответил).

**Решение.** За одной дверью принцесса. На этой двери не может висеть табличка, где сказано, что принцесса слева или справа (т.к. принцесса одна). Значит, там висит табличка первого типа.

Слева от принцессы – тигр. Все остальные двери ведут в коридоры.



Дверь в коридор возле комнаты с принцессой назовем «Правый коридор». А дверь в коридор возле комнаты с тигром назовем «Левый коридор». Все остальные двери назовем «все остальные коридоры».

На комнате с тигром может не может висеть табличка 3 типа (где утверждается, что справа принцесса). А может висеть либо 1, либо 2 типа. На правом коридоре не может висеть табличка 3 типа (т.к. оба утверждения были бы ложными). Т.е. тоже либо 1, либо 2.

На левом коридоре не может висеть табличка 1 типа (т.к. оба утверждения были бы ложными).

На всех остальных коридорах (они находятся между двумя коридорами) не может висеть табличка 2 типа (оба утверждения были бы ложными). А таблички 1 и 3 типа могут.

(Кстати, это рассуждение показывает, что комнат минимум 4, иначе мы не видели бы таблички третьего типа. На самом деле, понятно, что «всех остальных коридоров» нужно хотя бы один, потому что иначе (если дверей всего 4) принцесса однозначно напротив таблички третьего типа – и узнику не потребовался бы вопрос).

Итак: табличку второго типа узник мог заметить либо на левом коридоре, либо на правом коридоре, либо на комнате с тигром.

Если таблички, которые сразу увидел узник, шли слева направо так: 1-2-3, то вторая табличка однозначно на правом коридоре (справа от левого коридора и тигра не может быть табличка 3 типа). Тогда узник сразу сказал бы, где принцесса.

Так как узник не мог сказать, где принцесса, таблички были в таком порядке: 3-2-1.

И вторая табличка либо на комнате с тигром, либо на левом коридоре.

Соответственно, подозрительная на принцессу дверь это либо та, что путник заметил в самом начале, либо ее соседка справа (на которой тоже висит табличка первого типа, иначе путник бы все разгадал).

Поменять табличку нельзя только на двери с принцессой. Поэтому путник показывает на одну из подозрительных дверей, и по ответу короля узнает, там принцесса или нет.

**Критерии:** Полностью верное решение 7 баллов.

Доказано, что на двери с принцессой табличка 1 типа – 0 баллов.

Указан расклад по дверям (принцесса; слева от нее тигр, все остальное – коридоры) – вот это 1 балл.