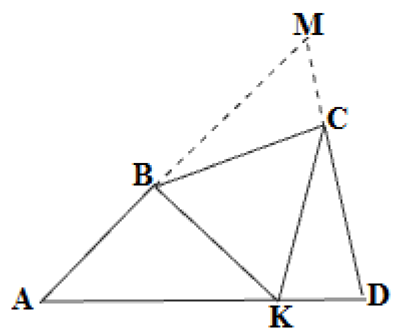
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА
2.02.2025 7 класс
г. Омск

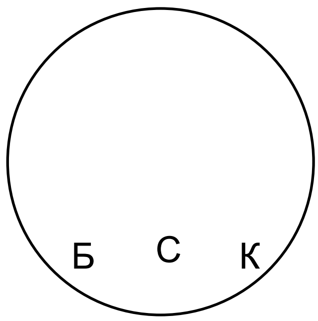
Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что знает такое натуральное число, у которого сумма цифр уменьшается на 2025 при прибавлении к нему некоторого однозначного числа. Не обманывает ли барон?
2. Девочка Катя худеет. Для этого она изменила свой рацион и теперь ест вредной еды вдвое меньше, а полезной – вдвое больше, чем раньше. Впрочем, суммарное количество еды при этом только увеличилось – и теперь девочка Катя съедает в полтора раза больше, чем ранее. Какой пищи девочка Катя до смены рациона ела больше: вредной или полезной и во сколько раз?
3. В четырехугольнике $ABCD$ (см. рисунок) угол ABC равен 150°. На стороне AD выбрали точку K. Оказалось, что $AB=BK=KC=CD$. Если стороны AB и CD продлить до пересечения в точке M, угол BMC будет равен 60°. Найдите углы треугольника AMD.



4. В городе N живут лжецы и рыцари (есть и те, и другие). Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Половина жителей города собралась на Морском бульваре, а вторая половина - на Цветном бульваре. Причем среди стоявших на одном из бульваров было ровно 166 лжецов. Каждый из собравшихся на Цветном бульваре сказал: «Не считая меня, в нашем городе лжецов вдвое больше, чем рыцарей». А каждый из стоявших на Морском бульваре сказал: «Не считая меня, в нашем городе лжецов втрое больше, чем рыцарей». Сколько жителей в городе?
5. Среди 11 чисел нет полуцелых. Сумма чисел равна 20. Если бы каждое из чисел округлили до ближайшего целого, их сумма стала бы равной 25. Все числа округлили вниз до ближайшего целого. Чему теперь равна их сумма? (*Числа вида* 1,5; 2,5; -3,5 – *полуцелые*).
6. Елочный шарик расчерчен на шесть секторов, каждый из которых покрашен в один из трёх цветов, и спереди выглядит так: Белый-Синий-Красный. Миша случайно уронил шарик, и он разбился по экватору. Сережа шарик склеил, но теперь он выглядит иначе. Миша очень расстроился. Ему нравился шарик в цветах российского флага. Но Сережа успокаивает Мишу: «Не волнуйся, мы его все равно повесим на елку так, что спереди будет видно Белый-Синий-Красный (правда, возможно, не слева направо, а справа налево!).

Получится ли у мальчиков так повесить шар на елку? Если да – покажите, как такое может быть.



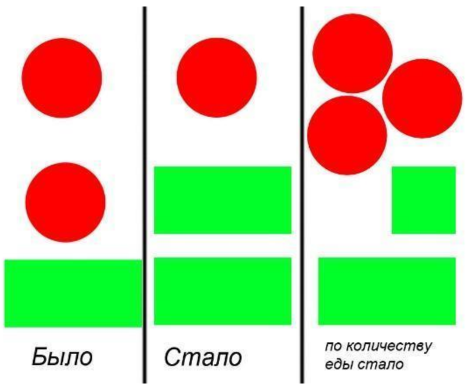
Если нет – докажите, что это невозможно.

Задания с решениями

1. (Штерн А.С.) Барон Мюнхгаузен утверждает, что знает такое натуральное число, у которого сумма цифр уменьшается на 2025 при прибавлении к нему некоторого однозначного числа. Не обманывает ли барон?

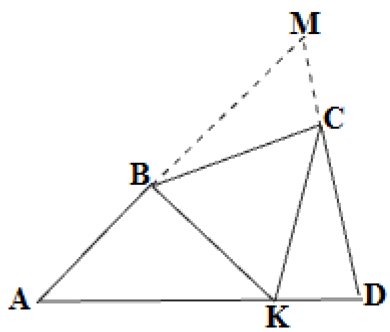
   <u>Ответ</u>: Такое число есть.
   <u>Решение</u>: Рассмотрим число, записанное девятками: 9…..9 (226 раз). Прибавим к нему 9. Получим число 10….08 (в середине 225 нулей). Сумма цифр была 9*226, стала 9. разница 9*225=2025.
   <u>Критерии.</u> Верный пример числа – 7 баллов. В остальных случаях – 0 баллов. Если в конструкции девяток их число отличается от правильного - 3 балла.

2. (Кукина Е.Г.) Девочка Катя худеет. Для этого она изменила свой рацион и теперь ест вредной еды вдвое меньше, а полезной – вдвое больше, чем раньше. Впрочем, суммарное количество еды при этом только увеличилось – и теперь девочка Катя съедает в полтора раза больше, чем ранее. Какой пищи девочка Катя до смены рациона ела больше: вредной или полезной и во сколько раз?



<u>Ответ</u>: До начала похудения девочка Катя ела вдвое больше полезной еды, чем вредной.
<u>Решение</u>. Было: 2 дозы вредной еды и одна доза полезной. Стало: 1 доза вредной еды и две – полезной. По количеству еды стало в 1,5 раза больше. То есть, как на третьем рисунке: 3 дозы вредной и 1,5 дозы полезной. Количество еды на втором и третьем рисунках одинаково. Значит, полдозы полезной еды равно 2 дозам вредной. До похудения девочка Катя ела вдвое меньше вредной пищи, чем полезной. (После смены рациона стала есть полезной в 8 раз больше, чем вредной). **<u>Критерии.</u>** Алгебраически или с помощью рассуждений получен верный ответ – 7 баллов. Получено верное равенство, из которого можно найти соотношение между вредной и полезной едой, но дальнейших продвижений нет – 3 балла. Верный ответ с проверкой – 1 балл. В остальных случаях – 0 баллов. Правильно решение, но неверный ответ (например перепутанные полезная и вредная еда) - 5 баллов.

3. (Круглова И.А.) В четырехугольнике *ABCD* угол *ABC* равен 150°. На стороне *AD* выбрали точку *K*. Оказалось, что *AB*=*BK*=*KC*=*CD*. Если стороны *AB* и *CD* продлить до пересечения в точке *M*, угол *BMC* будет равен 60°. Найдите углы треугольника *AMD*.



   <u>Ответ</u>: A=45°, D=75°, M=60°.
   <u>Решение первое (авторское).</u> Сумма углов A+D=120°, значит BKA+CKD тоже 120°, значит BKC=60°, треугольник BCK - равнобедренный с углом 60°, то

есть равносторонний, поэтому KBC=60°, ABK=90°, значит ABK – прямоугольный равнобедренный треугольник, поэтому A=45° , D=75°.

Решение второе. Т.к. угол ABC=150, угол CBM=30, угол MCB=90.
Обозначим угол A через α. Тогда угол BKA тоже α. Тогда угол ABK= (180–2α).
Тогда угол KBC=150–(180–2α)=2α–30. Тогда угол BCK тоже равен 2α–30.
Тогда угол KCD=90–(2α–30)=120–2α.
С другой стороны. Угол BKC=180 – 2KBC=180–2(2α–30)=240–4α.
Тогда угол CKD=180–BKA–BKC=180–α–(240–4α) =3α–60.
Тогда угол KCD=180–2CKD=180 – 2(3α–60)=300–6α.
Приравниваем: 300–6α=120–2α. Получаем 4α=180. A=45. Отсюда D = CKD = 75.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Доказано, что треугольник BCK – равносторонний, но дальнейших продвижений нет – 3 балла. В остальных случаях – 0 баллов. Ход решения верный, но допущена арифметическая ошибка - 5 баллов.

4. (Штерн А.С.) В городе N живут лжецы и рыцари (есть и те, и другие). Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Половина жителей города собралась на Морском бульваре, а вторая половина на Цветном бульваре. Причем среди стоявших на одном из бульваров было ровно 166 лжецов. Каждый из собравшихся на Цветном бульваре сказал: «Не считая меня, в нашем городе лжецов вдвое больше, чем рыцарей». А каждый из стоявших на Морском бульваре сказал: «Не считая меня, в нашем городе лжецов втрое больше, чем рыцарей». Сколько жителей в городе?

   Ответ: 1000.
   Решение: Заметим, что число людей в городе – четное. Поэтому сказать фразу «четверть из всех оставшихся – рыцари» рыцарь не мог (оставшихся – нечетное число). Следовательно, все рыцари города – на Цветном бульваре.
   Предположим, что 166 лжецов – на Морском бульваре. Тогда на Цветном бульваре в сумме тоже 166 человек. Тогда в сумме в городе 332 человека. Рассмотрим рыцаря. Он утверждает, что треть из оставшихся 331 человека – рыцари. Но 331 не делится на 3, поэтому так быть не может.
   Значит, на одном бульваре 166 лжецов и x рыцарей, а на другом – (166+x) лжецов. Суммарно в городе 332+2x человек.
   Рыцари утверждают следующее: всего в городе (331+2x)/3 +1 рыцарей. И это должно быть равно x. Решаем уравнение. 331+2x+3=3x; x=334. А людей в городе 1000.
   Критерии. Верное решение – 7 баллов. Ход рассуждений верный, но на последнем шаге допущена арифметическая ошибка – 6 баллов. За каждое из следующих продвижений по 1 баллу (баллы суммируются): 1) установлено, что все рыцари – на Цветном бульваре, 2) лжецы есть на обоих бульварах. В остальных случаях – 0 баллов.

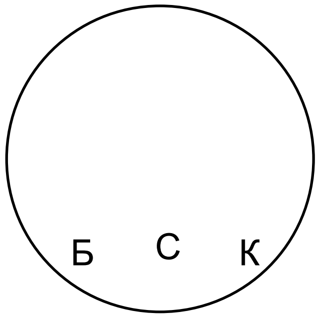
5. (Шаповалов А.В.) Среди 11 чисел нет полуцелых. Сумма чисел равна 20. Если бы каждое из чисел округлили до ближайшего целого, их сумма стала бы равной 25. Все числа округлили вниз до ближайшего целого. Чему теперь равна их сумма? (*Числа вида* 1,5; 2,5; -3,5 – *полуцелые*).

Ответ: 14.

Решение: При округлении сумма увеличилась на 5. Число при округлении увеличивается меньше, чем на 0,5. Если бы не все числа увеличились, то сумма увеличилась бы меньше чем на 10×0,5=5. Значит, все числа были округлены вверх. Но при округлении вниз сумма на 11 меньше, чем при округлении вверх, то есть равна 25–11=14.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Доказано, что все числа округляли именно вверх, но дальнейших продвижений нет – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

6. (Кукина Е.Г.) Елочный шарик расчерчен на шесть секторов, каждый из которых покрашен в один из трёх цветов. И спереди выглядит так: Белый-Синий-Красный. Миша случайно уронил шарик, и он разбился по экватору. Сережа шарик склеил, но теперь он выглядит иначе. Миша очень расстроился. Ему нравился шарик в цветах российского флага. Но Сережа успокаивает Мишу: «Не волнуйся, мы его все равно повесим на елку так, что спереди будет видно Белый-Синий-Красный (правда, возможно, не слева направо, а справа налево!).



Получится ли у мальчиков так повесить шар на елку?
Если да – покажите, как такое может быть.
Если нет – докажите, что это невозможно.

Ответ: к сожалению, нет, не получится.

Решение. Докажем, что Сережа ошибся.

Если у шарика ровно один синий сектор – его нельзя никак склеить “по-другому” так, чтобы синий сектор сохранился. Т. к. прикладывая синий «полусектор» к синему, мы однозначно прикладываем низ к верху.

Значит, у шарика как минимум два синих сектора (или больше). Второй синий (и остальные) должен быть изначально где-то сзади (см. рисунок).

При склейке Серёжа совместил между собой два разных синих «полусектора». Посмотрим на шарик спереди.

1) Пусть шарик после склейки опять выглядит Б-С-К. Закрываем рукой низ шарика и смотрим только на верх. От синей грани слева белая, а справа красная. Закрываем рукой верх шарика. От “другой синей” также слева белая, а справа красная. Таким образом, задняя сторона шарика изначально должна была выглядеть абсолютно как передняя. Но тогда после склейки если совместить синюю с синей – шарик будет выглядеть абсолютно как прежде.

2) Если шарик после склейки К-С-Б. Синяя сектор – не тот, который мы видели изначально (от изначального синего слева - белый, а справа - красный). То есть, склеились два разных невидимых ранее синих сектора (причем каждый из них - между красным и белым). Таким образом, сзади два боковых сектора были бы сини. А какой тогда центральный задний? Он должен быть и красный, и белый одновременно.

Критерии. Приведен полный перебор вариантов, сделан верный вывод, что Сережа ошибся – 7 баллов. Обосновано, что на шарике должно быть не менее двух синих секторов, но дальнейших продвижений нет – 2 балла. Дополнительно установлено, что шарик тогда после склеивания должен был выглядеть также, как изначальный, но 2) случай не рассмотрен – 3 балла.