МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

4.02.2024 7 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

1. Представьте 100 в виде суммы трёх простых чисел. Число простое, если оно имеет ровно два различных делителя.

2. В ряд стоят пять мешков с мукой. Два из них тяжёлые, а три полегче. Из каждого тяжёлого мешка отсыпали половину и поровну рассыпали по лёгким мешкам. После этого веса всех мешков уравнялись. Во сколько раз самый тяжёлый мешок изначально был тяжелее самого лёгкого?

3. Грабители всегда лгут о преступлениях, в которых замешаны, и говорят чистую правду о преступлениях, в которых не замешаны. Полиция задержала N человек, которых подозревала в ограблении банка (N>1). И спросила каждого, сколько из задержанных участвовало в этом ограблении. Первый ответил: «Один». Второй ответил: «Два», и так далее. N-ый ответил: «N». Кто из задержанных участвовал в ограблении, а кого надо отпустить?

4. Ульяна написала на доске трехзначное число. Вычла из числа сумму его цифр, стерла старое — и написала новое. Потом сделала еще раз: нашла сумму цифр, вычла и переписала число на доске. И так далее. Василиса написала на листочке однозначное число. Прибавила к нему сумму его цифр, стерла старое число и написала новое. Потом опять нашла сумму цифр, прибавила и переписала число. И так далее. В какой-то момент оказалось, что число на доске равно числу на листике. Какое число задумала Василиса?

5. Петя выложил выпуклый шестиугольник из шести палочек (возможно, разной длины). Оказалось, что в нём можно переместить две палочки так, что получится два непересекающихся треугольника, но, может быть, с общей вершиной. Докажите, что в исходном шестиугольнике существует диагональ, которая делится пополам некоторой другой диагональю.

6. К новому году мама украсила ёлку двумя нитками с бусинами. В одних бусах вперемешку нанизаны 2023 серебряных и 2023 золотых бусины, а на другой нитке нанизано по 2024 серебряных и золотых. Когда пришло время разобрать ёлку, Чук предложил Геку такую игру. Надо снимать бусины с нитки по очереди. Можно снять либо одну золотую бусину с любого конца, либо с разных концов две серебряные бусины. Если на бусах осталась одна серебряная бусина — то можно снять ее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. "Тащи нитку, Гек, а я чур делаю первый ход!" — говорит Чук. Зависит ли исход игры от того, какую нитку притащит Гек?

Задания с решениями

1. Представьте 100 в виде суммы трёх простых чисел.

Все возможные ответы: 2+19+79, 2+31+67, 2+37+61.

Критерии: Найден любой из способов – 7 баллов. Неправильное разбиение или не выписано разбиение – 0 баллов.

2. В ряд стоят пять мешков с мукой. Два из них тяжёлые, а три полегче. Из каждого тяжёлого мешка отсыпали половину и поровну рассыпали по лёгким мешкам. После этого веса всех мешков уравнялись. Во сколько раз самый тяжёлый мешок изначально был тяжелее самого лёгкого?

Ответ: В 6 раз.

Решение. Понятно, что два тяжелых мешка весят одинаково (потому что в конце их половины весит одинаково). Аналогично, три легких мешка весят одинаково (потому что в них добавили поровну – и стало одинаково). Пусть вес тяжелого мешка равен $6x$. Значит из него отсыпали $3x$. И в нем осталось $3x$. А по $2x$ досыпали в каждый легкий мешок. И стало тоже $3x$. Поэтому изначально в легких мешках было $1x$.

Критерии: Полностью правильное решение –7 баллов.

Объяснение, что в тяжелых мешках одинаковый вес – 2 балла. Объяснение, что в легких мешках одинаковый вес – 2 балла.

Итого: если человек без объяснения считает тяжелые мешки равными и легкие равными (а все остальное верно) – 3 балла.

3. Грабители всегда лгут о преступлениях, в которых замешаны, и говорят чистую правду о преступлениях, в которых не замешаны. Полиция задержала N человек, которых подозревала в ограблении банка. И спросила каждого, сколько из задержанных участвовало в этом ограблении. Первый ответил: «Один». Второй ответил: «Два», и так далее. N-ый ответил: «N». Кто из задержанных участвовал в ограблении, а кого надо отпустить?

Ответ: Отпускаем (N-1)-ого. Остальные виновны.

Решение. Рассмотрим фразу N-ого. Если он сказал правду, он сам же замешан – противоречие. Значит, он солгал. Тогда:

1) N-ый точно участвовал в ограблении.

2) среди N задержанных человек от 1 до (N-1) совершили это преступление.

Значит, кто-то из предыдущих сказал правду. Правду сказал ровно один, ведь они сказали разное. Значит, один не замешан, а (N-1) замешаны.

Критерии: Полностью правильное решение –7 баллов.

а) Правильный ответ без обоснования – 2 балла.

б) Если ответ наполовину “N-1-ый виновен” без указания, что остальные невиновны – 0 баллов.
в) Обосновано, что последний виновен (дальнейших продвижений нет) – 1 балл.
г) Если обосновано, что виновен ровно один – 2 балла (не суммируется с (в), но суммируется (а)).
Если утверждение такое: “Все утверждения друг другу противоречат, значит среди них ровно одно верное” – это неточное утверждение (а почему не могут быть все ложь?), не является доказательством того, что один говорит правду.

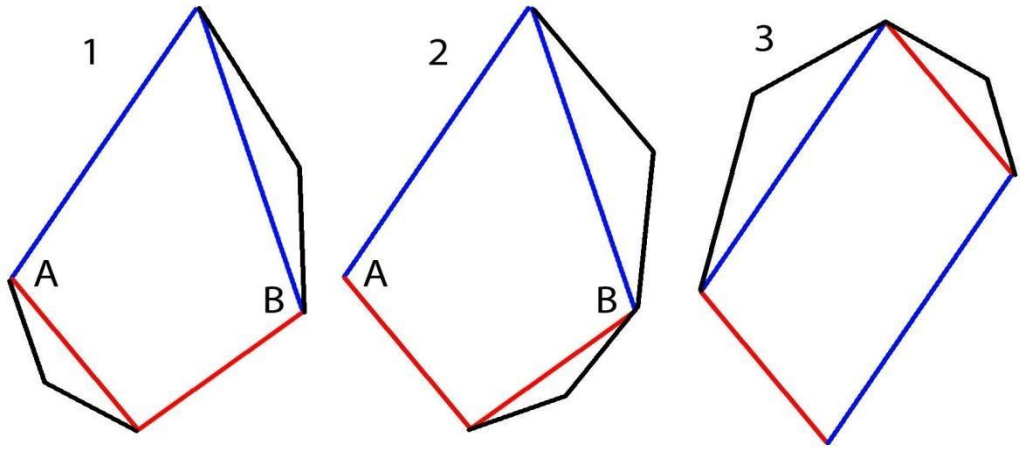
4. Ульяна написала на доске трехзначное число. Вычла из числа сумму его цифр, стерла — и написала новое. Потом сделала еще раз: нашла сумму цифр, вычла и переписала число на доске. И так далее. Василиса написал на листочке однозначное число. Прибавила к нему сумму его цифр, стерла старое число и написала новое. Потом опять нашла сумму цифр, прибавила и переписала число. И так далее. В какой-то момент оказалось, что число на доске равно числу на листике. Какое число задумала Василиса?

Ответ: *9.*
Решение. У числа и суммы его цифр одинаковый остаток при делении на 9.
Поэтому у Ульяны после первого хода число делится на 9.
Понаблюдаем за числом Василисы. Предположим, что число не делилось на 9. Если мы к нему прибавим число с таким же остатком (сумму цифр), то остаток удвоится, значит, число по-прежнему не будет делиться на 9. Поэтому если самое первое число Василисы не делится на 9, то и все последующие полученные ею числа также не поделятся. (И число Ульяны не совпадет с числом Василисы).
Значит, исходное число Василисы делилось на 9. Оно однозначное – поэтому только 9 или 0.
Критерии. Полностью верное решение – 7 баллов.
Факт, что сумма цифр имеет такой же остаток, как и само число, считается общеизвестным.
Доказано, что у Ульяны после первого хода числа делятся на 9 – 2 балла.
После этого сделан сразу вывод: значит, исходное число Василисы 9 (без доказательства того, что неделящиеся на 9 не подходят) – 3 балла.
Упущен случай когда число Василисы 0 – 5 баллов.

5. Петя выложил выпуклый шестиугольник из шести палочек (возможно, разной длины). Оказалось, что в нём можно переместить две палочки так, что получится два непересекающихся треугольника. Докажите, что в

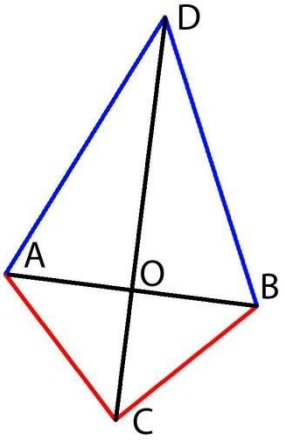
исходном шестиугольнике существует диагональ, которая делится пополам некоторой другой диагональю.

Решение. Есть два варианта: либо мы перемещаем две смежные палочки, либо мы берем две противоположные палочки. (Если берем палочки через одну, то одна палочка «повисает в воздухе», и треугольники не составить.)
Если взяты соседние палочки, то варианта опять два: либо мы их приложили к ближним “уголкам”, либо крест накрест.
Итого, три варианта картинки:



Если получился вариант картинки 1 или 2 (дельтоид) – то диагональ, которая делится пополам – AB. Если вариант 3 (параллелограмм) – то любая из двух.

Для разбора задач перед школьниками. Как доказать, что у дельтоида одна диагональ делится пополам?
Рассмотрим треугольники ADC и BDC, они равны по трем сторонам. Поэтому DO – биссектриса треугольника ADB (равнобедненного). Значит, она же – медиана этого треугольника. Значит, AO =OB.



Критерии:
Полностью правильное решение –7 баллов.
Полностью разобран ровно один вариант – 2 балла.
Разобраны два варианта – 3 балла.

6. К новому году мама украсила елку двумя нитками с бусинами. В одних бусах вперемешку нанизаны 2023 серебряных и 2023 золотых бусины, а на другой нитке нанизано по 2024 серебряных и золотых. Когда пришло время разбирать ёлку, Чук предложил Геку такую игру. Надо снимать бусины с нитки по очереди. Можно снять либо одну золотую бусину с любого конца, либо с разных концов две серебряные бусины. Если на бусах осталась одна серебряная бусина — то можно снять ее.

Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. "Тащи нитку, Гек, а я чур делаю первый ход!" — говорит Чук. Зависит ли исход игры от того, какую нитку притащит Гек?

Ответ: зависит. С ниткой 2024 выигрывает Гек; с ниткой 2023 Чук.

Решение. Если на двух концах серебряные бусины – то снимаются серебряные. Если хотя бы на одном из концов золотая – то снимается одна из них. Пока на нитке есть бусины – ход сделать можно. Посчитаем количество ходов.

Для нитки из 2×2024 бусин: 2024:2=1012 ходов на серебряные бусины. 2024 ходов на золотые бусины. Итого, вместе 3036 ходов. Первым ходит Чук, вторым – Гек. Значит, все четные ходы делает Гек. Значит, проигрывает Чук.

Для нитки 2×2023 бусин: 2023 хода на золотые бусины. 2022:2+1=1012 ходов на серебряные бусины. Итого, всего 3035 ходов. Первым ходит Чук, значит, все нечетные ходы делает Чук – и он выиграет.

Критерии: Полностью правильное решение – 7 баллов.

Только верный ответ “зависит” – 0 баллов.

Верный ответ (без обоснования): “на нитке 2024 выигрывает Гек; на нитке 2023 Чук” – 1 балл.

Одна случай разобран полностью верно, второй неверно – 3 балла.

Не упомянут факт, что ход возможен всегда (хотя бы в виде цитирования условия) – 5 баллов.