МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА
11.12.22

8 класс

1. По кольцевому маршруту с постоянными скоростями ездили три Теслы. Красная Тесла ехала на встречу и синей и зеленой, причем встречала зеленую каждые 4 минуты, а синюю - каждые 3 минуты. Как часто встречала другие машины зелёная Тесла?

Решение.

Пусть длина маршрута это 1, тогда сумма скоростей красной и зеленой Тесл равна 1/3, а красной и синей – 1/4, тогда разность между скоростями зеленой и синей равна 1/3-1/4=1/12. Следовательно, зеленая Тесла встречала другие Теслы каждые 12 минут (синюю) и 4 минуты (красную).

Критерии: 7 или 0 баллов

2. Из 4 палочек сложен контур квадрата. Палочки разрезали так, что всего получилось 7 частей. Докажите, что можно выбрать три части и сложить из них треугольник.

Решение.

Пусть длина стороны равна 2. Если осталось две целых палочки, из них и любого куска можно сложить равнобедренный треугольник. Если осталась только одна целая, то три палочки разрезаны на две части каждая. Возьмём от каждой палочки б*о*льшую часть. Длина каждой не менее 1, но меньше 2. Так как сумма длин любых двух выбранных частей не менее 2, она больше третьей выбранной части. Неравенство треугольника выполнено, поэтому треугольник можно сложить.

Критерии: если при переборе вариантов упущен хотя бы одни из возможных – не более 3-х баллов.

3. x и y – различные натуральные числа, причем xy – точный квадрат. Докажите, что x^2+xy+y^2 – составное.

Решение.

Пусть $xy=a^2$, тогда $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-a^2=(x+y-a)(x+y+a)$, так как все числа натуральные, то $x+y+a>1$. Предположим, что $x+y-a=1$, заметим, что так как $xy=a^2$, то $x\geq a$ (или y), но тогда $x+y=1+a$ возможно лишь при $x=a$, $y=1$. Но тогда $xy=a=a^2$, откуда $a=1=x$ и $x=y$, что противоречит условию.
Критерии: не разобран случай $x+y-a=1$ не более 3 баллов.

4. Четырехугольник ABCD таков, что BC||AD, через точку пересечения диагоналей O провели прямую *m*, пересекающую стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Пусть E – точка пересечения *m* и AB, F – точка пересечения m и DC. Докажите, что если MO=ON, то MF=NE.
Решение.
Треугольники ΔMAO и ΔNOC подобны (по трем углам), а так как MO=ON, то они равны, следовательно, AO=CO и AM=NC. Треугольники ΔAOD и ΔBOC подобны (по трем углам), а так как AO=CO, то они равны, то есть ABCD – параллелограмм. Треугольники ΔNCF и ΔAEM подобны (по трем углам), а так как AM=NC, то они равны. Откуда следует, что EM=NF, а значит и MF=NE.
Критерии:
Доказано, что ABCD – параллелограмм – 3 балла.

5. На шахматной доске разрешается выбрать область, содержащую четное число клеток, и взмахнуть волшебной палочкой - все клетки внутри области сменят цвет на противоположный. За какое наименьшее количество таких операций можно сделать доску одноцветной, или такое невозможно в принципе? (Область — это часть шахматной доски, состоящая из нескольких целых клеток этой доски, которая не развалится на отдельные части, если вырезать ее из шахматной доски.)
Решение: Очевидно, то одной такой операции не хватит, а за две операции – можно.

Критерии: за необоснованность невозможности обойтись одной областью, баллы не снимать.

6. Несколько человек - рыцарей и лжецов - расставили по кругу и сообщили священное натуральное число без повторяющихся цифр, после чего одному из них дали микрофон, и он заявил: "В этом числе есть цифра 1". Потом подумал немного и сказал: "Это число делится на 1", и передал микрофон соседу слева. Тот произнёс в точности те же фразы, заменив "1" на "2", и передал микрофон соседу слева, и т.д. Девятый по счёту то же самое сказал про цифру 9, а его левый сосед ляпнул: "Это число содержит 0." И, немного подумав, "Это число делится на 0" - и выронил микрофон, видимо сам был в шоке от сказанного. Известно, что цифр в священном числе на одну меньше, чем говоривших лжецов. На какую цифру оканчивается священное число?

Ответ: на 5.

Решение:

Во-первых, заметим, что в числе есть 1 (и первый говоривший - рыцарь), но нет 0 (последний говоривший - лжец) по причине делимости.

Во-вторых, говоривших лжецов не более 5. Ведь если их хотя бы 6, то они своими репликами запретили хотя бы 6 цифр из 10 (оставив не более 4 цифр), при том, что различных цифр в числе хотя бы 5.

В-третьих, говоривших лжецов не менее 4. Ведь если их двое, то в числе всего одна цифра (то есть 1), и уже четвёртый не может быть ни лжецом (их двое), ни рыцарем. А если лжецов трое, то в числе 2 цифры, и рыцарей не более двух. Если рыцарей в кругу двое, то круг был пройден дважды, что даёт нам 4 правды (=4 цифры), а если рыцарь один, то он сообщил о наличии в числе цифр 1, 5 и 9, в то время как цифр только две.

Итак, лжецов 4 или 5, и в любом случае первый рыцарь успел высказаться дважды. Вторая названная им цифра не меньше 6. Но это не может быть 6: тогда в числе есть и 2, и 3, и 7 (поскольку назвавший 2 назовёт и 7) - уже 5 цифр. Это не может быть и 8: тогда в числе и 2, и 4, и 9.
Если первый рыцарь назвал 9, то в числе есть 3 и оно делится на 9, то есть в числе должна быть цифра 5. Чтобы число делилось на 5, она должна идти последней.
Если первый рыцарь назвал 7, то среди говоривших должен быть ещё один рыцарь, который не мог назвать 2 (придется назвать и 8) или 4 (поскольку тот же человек назвал бы 0) или 6 (см. выше: слишком много цифр). Не мог он назвать и 3: тогда бы он назвал 9, но число из цифр 1,3,7,9 не кратно девяти. Он мог назвать лишь 5, и мы получим число 175, кратное как 5, так и 7. Итак, последняя цифра снова 5.
Критерии: (аддитивные):
верно установлено, что лжецов не более 5 - 1б;
верно установлено, что лжецов не менее 4 - 1б;
верно установлено, что число не может содержать 6 или 8 (то, что содержит 1 и не содержит 0 - очевидно) - 1б.

9 класс

1. Придумайте число, состоящее из различных цифр, которое нацело делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение: Например 7560.
Критерии: Правильное число с проверкой делимости – 7 баллов.
Правильное число без каких-либо пояснений – 5 баллов.
Правильное число, указано, что оно делится на 1-9, но не показано это – 6 баллов.
Неправильное число – 0 баллов.

2. По кольцевому маршруту с постоянными скоростями ездили три Теслы. Красная Тесла зарегистрировала, что встречала зеленую каждые 3 минуты, а синюю каждые 5 минут. Зеленая: красную каждые 2 минуты, синюю - каждые 12. Синяя: красную каждые 4 минуты, зелёную каждые 7 минут. Оказалось, что каждая Тесла дала ровно

одно верное показание. Как часто встречались Теслы, ездившие в одном направлении?

Ответ: Возможны два варианта: 12 минут или 4 минуты.

Решение:

Поскольку две Теслы должны зарегистрировать одинаковые интервалы между встречами между собой, а такого не случилось, среди этих показаний хотя бы одна ложь. Точнее, ровно одна ложь, поскольку из 6 показаний в точности 3 правдивы.

Пусть Красная встречала Синюю каждые 5 минут (КС=5). Тогда КЗ не 3, СК не 4, а значит СЗ=7, ЗС не 12, то есть ЗК=2. Скорости сближения: 1/5, 1/7, 1/2. Ни сумма, ни разность никаких двух значений (в зависимости от направления движения Тесл) не дадут третье, и данная ситуация невозможна.

Вторая ситуация: КС не 5, то есть СК=4, СЗ не 7, тогда ЗС=12, ЗК не 2, а КЗ=3. Скорости сближения: 1/3, 1/4, 1/12. Заметим, что третье значение в точности является разностью первых двух, то есть Синяя и Зелёная Теслы ездили в одном направлении и встречались каждые 12 минут. Но соверешенно аналогично ¼ является разницей 1/3-1/12, и Может так быть, что синяя и красная машины ездили в одну сторону (встречаясь раз в 4 минуты), а зеленая им навстречу.

Критерии: Полное решение 7 баллов

Школьник доказал, что есть два варианта (3– 4– 12) и (5– 2– 7) – 1 балл. Если после этого без обоснований отмел вариант (2-5-7), то еще один балл.

Если же вариант 2– 5– 7 отброшен обоснованно +3 балла (в сумме 4).

Если правильные выклдадки привели к варианту 3-4-12, и школьник показал, что этот вариант возможен (но упустил случай, когда навтсречу ездит красная машина) – 5 баллов.

За пример на 12 или на 4 с обоснованием (т.е. показано, кто куда едет и все сходится) – 2 балла.

Если найдены оба ответа с обоснованием – 3 балла.

3. Существуют ли два различных приведенных многочлена $x^2+p_1x+q_1$, $x^2+p_2x+q_2$, причем p_1,q_1 - корни второго, а p_2,q_2 - корни первого?

Ответ: да, существуют. Например: x^2+2x и x^2-2x.

Критерии: правильный ответ с обоснованием – 7 баллов.

В процессе решения получен факт $q_1 = q_2$ 1 балл.

4. Четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB||CD$, через точку пересечения диагоналей O провели прямую m, пересекающую стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Пусть E – точка пересечения m и AB, F – точка пересечения m и CD. Докажите, что если $MO=ON$, то $MF=NE$.

Решение. Проведем прямую GH параллельно AB и CD через точку O (G на AD, H на BC), пусть AB=a, DC=b.

Тогда b:GO=AC:AO=1+b/a, откуда GO=ab/(a+b).

Аналогично a:HO=AC:OC=1+a/b, откуда HO=ab/(a+b). То есть GO=HO. Таким образом треугольники MOG и NOH равны (по двум сторонам и углу), следовательно AD||BC (накрестлежащие равные углы).

Далее устанавливаем равенство треугольников MAE и NCF (по стороне AM=CN и двум прилегающим углам) – и тогда получаем, что NF=ME.

Критерии: доказано, что ABCD параллелограмм или получено отношение NE:FM=AB:CD – 3 балла.

5. На шахматной доске без угловой белой клетки разрешается выбрать область, содержащую чётное число клеток, и взмахнуть волшебной палочкой – все клетки внутри области сменят цвет на противоположный. За какое наименьшее количество таких операций можно сделать доску чёрной, или такое невозможно в принципе? (Область – это часть шахматной доски, состоящая из нескольких целых клеток этой доски, которая не развалится на отдельные части, если вырезать ее из шахматной доски).

Ответ: такое невозможно.

Решение: Если в выделенной области $2k$ клеток, а x из них белые (а тогда $(2k\text{-}x)$ черные), то после перекраски количество белых клеток увеличится на $(2k\text{-}x)\text{-}x=2k\text{-}2x$. Т.е. изменится на четное число. Заметим, что вначале 31 белых клеток (четное количество). За каждое перекрашивание, четность этого количества не изменится. Поэтому 0 стать не может.

Критерии: Полностью правильное решение 7 баллов.

Необоснованно написано, что количество белых всегда нечетное 0 баллов.

6. Дома у хоббитов имеют не только дверь наружу, но и соединены с домами других хоббитов системой нор (без перекрестков), причем от каждого дома норами можно дойти до любого другого. При проведении соц. опроса 100 хоббитов указали, что из их дома выходит 1 нора, 100 – что 2 норы, … 100 – что *n* нор к другим домам. Но половина всех хоббитов – хвастуны, и указали число большее, чем на самом деле, так что указанное общее число выходов в норы оказалось в полтора раза больше истинного. Честный хоббит Бильбо Бэггинс рассказывал, что однажды отправился в путешествие по норам и, спустя некоторое время, вернулся домой, посетив при этом дома всех хвастунов и не используя ни одну нору повторно. При каком наименьшем *n* это возможно, если известно, что нор между домами честных хоббитов нет?

Ответ: *n*=6.

Решение:

Хоббитов 100*n*, причем насчитали $n(n+1)\cdot 50$ n(n+1)*50 входов в норы, на деле их $n(n+1)\cdot 50\cdot\frac{2}{3}$ n(n+1)*50*(2/3), а нор $n(n+1)\cdot\frac{50}{3}$ n(n+1)*50/3. Граф нор связный (вершины – дома, ребра – норы), Бильбо Бэггинс обошел дома всех хвастунов по циклу, за пределами которого остались честные хоббиты. А значит, нор не меньше, чем хоббитов: $n(n+1)\cdot\frac{50}{3}\geq n\cdot 100\ \Rightarrow\ n+1\geq 6\ \Rightarrow\ n\geq 5$ n(n+1)*50/3>=n*100 => n+1>=6 => n>=5. Возможно ли *n*=5? В этом случае истинное число нор 500 (как и хоббитов). Причем цикл единственный. 100 честных хоббитов имеют только одну нору, и поэтому в цикл не попали. Остальные 150 честных хоббитов попали в цикл (если хотя бы один такой не в цикле, то у него хотя бы 2 выхода в норы, по одному из которых нельзя выйти на цикл, так как противное создавало бы еще один цикл, не пройденный Бильбо, что невозможно в связном графе, в котором число вершин и ребер равно. А раз второй выход ведет не к циклу, то он ведет к вершине вне цикла, то есть к ещё одному честному хоббиту, а таких нор нет). Среди них найдется честный хоббит, у которого 3 выхода в норы, а значит, есть нора, по которой не ходил Бильбо. Это не может быть нора к другой вершине цикла Бильбо, т.к. он создавал бы еще один цикл. Но это не может быть и нора, ведущая за пределы цикла, поскольку там только честные хоббиты. Значит вариант n=5 невозможен.

Возможно ли n=6? В этом случае 600 хоббитов и 700 нор. «1» ответить могли только честные хоббиты за пределами цикла, «2» ответить могли только честные хоббиты внутри цикла Бильбо. Пусть «3» ответили только честные хоббиты внутри цикла Бильбо. Тогда пусть «4» ответили хвастуны, из домов которых ведут норы к хоббитам за пределами цикла (по одной норе, конечно), «5» - хвастуны, из домов которых ведут норы к честным хоббитам внутри цикла Бильбо, ответившим «3» (опять же, по одной норе). Считаем: было 500 хоббитов в цикле Бильбо, 100 за пределами. 500 нор в цикле Бильбо, 100 ведут за пределы цикла, еще 100 внутри – всё сходится, больше нор нет.

Критерии: Показано, что $n \geq 5$ – 2 балла.

Показано, что n=5 невозможно – 2 балла (добавляется).

Показано, что n=6 возможно – 2 балла (добавляется).

Доказано, что лжецы произносили вслух не менее чем 3 – 1 балл.

Полностью правильное решение: 7 баллов.

10-11 класс

1. Придумайте число, состоящее из различных цифр, которое нацело делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение. Например, 7560.

Критерии. Приведен правильный пример – 7 баллов. Иначе – 0 баллов.

2. x и y – различные натуральные числа, причем их произведение – точный квадрат. Докажите, что разность их кубов раскладывается в произведение трёх натуральных чисел, отличных от 1.

Решение.

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=(x-y)\left((x+y)^2-xy\right)=(x-y)(x+y-a)(x+y+a)$$

$a^2=xy$. Заметим, что если $x-y=1$, то $yx-y^2=y$, следовательно $y^2+y=a^2$, и $(a\text{-}y)(a\text{+}y)\text{=}y$, что не возможно, так как $a-y\geq 1$ и $a+y\geq y$. Поэтому первая скобка не равна 1.

Вторая скобка не равна 1, потому что все числа натуральные.

Если $x+y-a=1$, то $x+y-1=a$ и $x^2+y^2+2xy-x-y+1=xy$, то есть $x^2+y^2+xy-x-y+1=0$, но $x^2-x\geq 0$, $y^2-y\geq 0$ и xy+1>0, противоречие.

Таким образом, все три множителя не равны 1.

Критерии:

Правильное решение – 7 баллов. Получено разложение разности кубов в произведение трех натуральных чисел без доказательства отличия множителей от 1 – 1 балл. Получено разложение разности кубов в произведение трех натуральных чисел с доказательством отличия одного множителя от 1 – 2 балла. Получено разложение разности кубов в произведение трех натуральных чисел с доказательством отличия двух множителей от 1 – 3 балла.

3. Из 4 палочек сложен контур квадрата. Палочки разрезали так, что всего получилось 10 частей. Докажите, что можно выбрать три части и сложить из них треугольник.

Решение.

(авторское) Пусть длина стороны равна 2, тогда периметр квадрата 8, а длина самой короткой части *k* не более 8/10<1. Заметим, что если сторона разломана на две части, то большая из них не короче 1. Если сторона разломана на 3 части, и из них нельзя сложить треугольник, то самая длинная часть должна быть не короче 1.

Случай 1: есть три стороны, каждая из которых разрезана меньше, чем на 4 части. Возьмём из каждой самую длинную часть, она не короче 1. Нельзя сложить треугольник только в случае, если выбраны длины 2, 1 и 1. Но тогда можно сложить равнобедренный треугольник из палочек k, 1 и 1.

Случай 2: нет трёх сторон, каждая из которых разрезана менее чем на 4 части. Тогда есть две целые стороны. Из палочек длин 1, 1, k сложим равнобедренный треугольник.

(альтернативное) Пусть 1 – длина стороны квадрата.
(а) Пусть есть две палочки которые не разрезали, тогда взяв их и любой из кусочков, мы сможем сложить треугольник.
(б) Пусть есть две палочки которые разрезали на две части, их длины x, 1-x, y, 1-y и пусть $x \ge y \ge \frac{1}{2}$, тогда взяв y, 1-y, x, мы получим треугольник.
(в) Пусть есть три палочки, которые разрезали на три части.
Пусть $а_1 \ge а_2 \ge а_3$ – части первой палочки, $б_1 \ge б_2 \ge б_3$ – части второй палочки, $в_1 \ge в_2 \ge в_3 \ge в_4$ – части третьей палочки.
Если хотя бы один из отрезков $а_1$, $б_1$ или $в_1$ равен 1/3, то нужная палочка делится на 3 равные части – из них собирается правильный треугольник.
Пусть далее $а_1$>1/3, $б_1$>1/3 и $в_1$>1/3. Если все они не превосходят 2/3, то из них троих собирается треугольник.
Пусть какой-то из них больше 2/3, допустим $а_1$. Тогда треугольник соберется из $а_1$, $б_1$ и 1.

(г) Если есть хотя бы одна палочка, разрезанная более чем на 4 части, то непременно реализуется вариант (а) или (б).
(д) Пусть есть две палочки, разрезанные на четыре части, тогда реализуется вариант (а).
(е) Таким образом, остался единственный вариант, когда есть по одной палочке, разрезанных на одну, две, три и четыре части.
Продолжение решения.
Пусть $а_1 \ge а_2$ – части палочки, разделенной на 2 части, $б_1 \ge б_2 \ge б_3$ – части палочки, разделенной на 3 части, $в_1 \ge в_2 \ge в_3 \ge в_4$ – части палочки, разделенной на 4 части.
$а_1 \ge 0,5$, и если $а_1$=0,5, то $а_1$, $а_2$ и $б_3$ дают треугольник.
Пусть далее $а_1 > 0,5$. Если $б_1 \ge 0,5$, то они с $а_1$ и 1дают треугольник.
Пусть далее $б_1 < 0,5$. Тогда $б_1 \ge \frac{1}{3}$, а $\frac{1}{2} > б_2 \ge \frac{1}{4}$. Если $в_1 \ge 0,5$, то они с $а_1$ и 1 дают треугольник.
Пусть $в_1 < 0,5$. Тогда $в_1 \ge \frac{1}{4}$, и $в_1$ вместе с $б_1$ и $б_2$ дает треугольник.

Критерии. Если при переборе вариантов упущен один из возможных – не более 3-х баллов. Если при переборе вариантов упущено два из возможных – не более 1 балла.

4. Дано 2022 многочлена вида $x^2 - px + q$, корни предыдущего являются коэффициентами следующего (и так по кругу), причем хотя бы один из корней ненулевой. Что больше: произведение всех пэшек или сумма всех кушек?

Решение.

По теореме Виета для второго многочлена имеем: $p_1 + q_1 = p_2$, $p_1 \cdot q_1 = q_2$ для третьего: $p_2 + q_2 = p_3$, то есть $p_1 + q_1 + q_2 = p_3$, $p_2 \cdot q_2 = q_3$, то есть $p_2 \cdot p_1 \cdot q_1 = q_3$ и т.д., дойдя по кругу до первого уравнения и выполнив подстановку, получим $p_1 + q_1 + q_2 + ...q_k = p_1$ (сумма всех кушек 0)

$q_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k = q_1$ (произведение всех пэшек 1, если q_1 или, без ограничения общности, любая другая кушка не равна 0)

Если все кушки - нули, то все пэшки равны между собой, а значит ненулевые, а поскольку их четно, то произведение положительно.

Итак, произведение всех пэшек больше суммы всех кушек.

Критерии. Правильное решение – 7 баллов. Найдена сумма кушек – 2 балла. Найдено произведение пэшек – по 1 баллу за каждый из двух случаев. Неполные баллы суммируются.

5. Дома у хоббитов имеют не только дверь наружу, но и соединены с домами других хоббитов системой нор (без перекрестков). При проведении соц. опроса 100 хоббитов указали, что из их дома выходит 1 нора, 100 – что 2 норы, … 100 – что n нор к другим домам. Половина хоббитов – честные, и всегда говорят правду, а половина – хвастуны, любят приврать, и указали число большее, чем на самом деле, так что указанное общее число выходов в норы оказалось в два раза больше истинного. Хоббит Бильбо Бэггинс рассказывал, что однажды отправился в путешествие по норам и выяснил, что невозможно за один переход по норе от честного хоббита добраться к честному. А не хвастун ли Бильбо?

Ответ: хвастун.

Решение.

Хоббитов $100n$, причем насчитали $n(n+1)\cdot 50$ n(n+1)*50 дверей в норы, на деле их $n(n+1)\cdot 25$ n(n+1)*25, а нор $n(n+1)\cdot\frac{25}{2}$ n(n+1)*25/2.

Допустим, Бильбо честный.

Если $n=2k$, то от честных хоббитов ведет минимум $\frac{k(k+1)}{2}\cdot 100$ (k(k+1)/2)*100 нор, все – к хвастунам. Но всего нор $n(n+1)\cdot\frac{25}{2}=k(2k+1)\cdot 25$ n(n+1)*25/2=k(2k+1)*25, то есть меньше.

Если $n=2k+1$, то от честных хоббитов ведет минимум $\frac{k(k+1)}{2}\cdot 100+50(k+1)=50(k+1)^2$ (k(k+1)/2)*100+50(k+1)=50(k+1)^2 нор, все к хвастунам. Но всего нор $n(n+1)\cdot\frac{25}{2}=(k+1)(2k+1)\cdot 25$ n(n+1)*25/2=(k+1)(2k+1)*25, то есть меньше. Противоречие. Значит, Бильбо не может быть честным.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов. Найдено количество нор – 1 балл. Доказана оценка для четного числа n – 3 балла. Доказана оценка для нечетного числа n – 3 балла. Неполные баллы могут суммироваться.

6. В треугольнике ABC ($AB\neq BC$) прямая, проходящая через вершину B и точку касания отрезка AC с соответствующей вневписанной окружностью, пересекает биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle C$ в точках M и N. А сами биссектрисы пересекаются в точке I. Докажите, что площади треугольников AIN и CMI равны.

Решение.

Обозначим точку касания AC и вневписанной окружности через D. Заметим, что суммы $AB+AD$ и $CB+CD$ равны длинам касательных, проведённых к вневписанной окружности из точки B. Таким образом, получаем равенство $AB+AD=CB+CD$.

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD}+\frac{DA}{BD}=\frac{CB}{BD}+\frac{DC}{BD}.$$

Обозначим углы $\angle IAD = \alpha$, $\angle ICD = \beta$, $\angle DBC = \gamma$.

Используя теорему синусов, в последнем равенстве заменим отношения сторон на отношения синусов противолежащих углов в соответствующих треугольниках. Получим

$\frac{\sin(2\beta+\gamma)}{\sin(2\alpha)} + \frac{\sin(\pi-(2\alpha+2\beta+\gamma))}{\sin(2\alpha)} = \frac{\sin(\pi-(2\beta+\gamma))}{\sin(2\beta)} + \frac{\sin(\gamma)}{\sin(2\beta)}$ или

$$\frac{\sin(2\beta+\gamma)+\sin(2\alpha+2\beta+\gamma)}{\sin(2\alpha)} = \frac{\sin(2\beta+\gamma)+\sin(\gamma)}{\sin(2\beta)}$$

Преобразуем числители дробей, используя формулу для суммы синусов

$$\frac{2\sin(\alpha+2\beta+\gamma)\cos(\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta)}{\sin(2\beta)}.$$

А для знаменателей воспользуемся формулой синуса двойного угла $\frac{2\sin(\alpha+2\beta+\gamma)\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta)}{2\sin(\beta)\cos(\beta)}$.

Преобразовав полученное равенство, получим $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+2\beta+\gamma)}$.

Угол $\beta+\gamma$ является смежным с углом MNI, поэтому синусы этих углов совпадают. По тем же причинам совпадают синусы углов $\alpha+2\beta+\gamma$ и NMI. Поэтому последнее равенство можно переписать $\frac{\sin(\angle ICA)}{\sin(\angle IAC)} = \frac{\sin(\angle MNI)}{\sin(\angle NMI)}$.

Снова используем теорему синусов, чтобы перейти от отношения синусов к отношению сторон $\frac{AI}{CI} = \frac{MI}{NI} \Rightarrow AI \cdot NI = CI \cdot MI$.

Полученное равенство умножим на $1/2$ и на синус угла между AI и CI. Получим в левой и правой частях формулу для площадей треугольников AIN и CMI. Утверждение доказано.

Критерии: 7 или 0 баллов.