

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

8 класс

1. У принца семимильные сапоги-скороходы. За 1 минуту они переносят принца на 7 миль. А сняв их, принц может идти со скоростью 1 миль в минуту. Двигаться он может только по дороге – вокруг заколдованный лес! По дороге до принцессы 111 миль. Успеет ли он добраться за принцессы за 17 минут? (Кукина Е.Г.)

Решение: Да, успеет. Принц делает 16 шагов в сапогах на 112 миль, а потом за 1 минуту возвращается без сапогов на 1 милю.

Критерии: Верное решение 7 баллов, иначе 0 баллов.

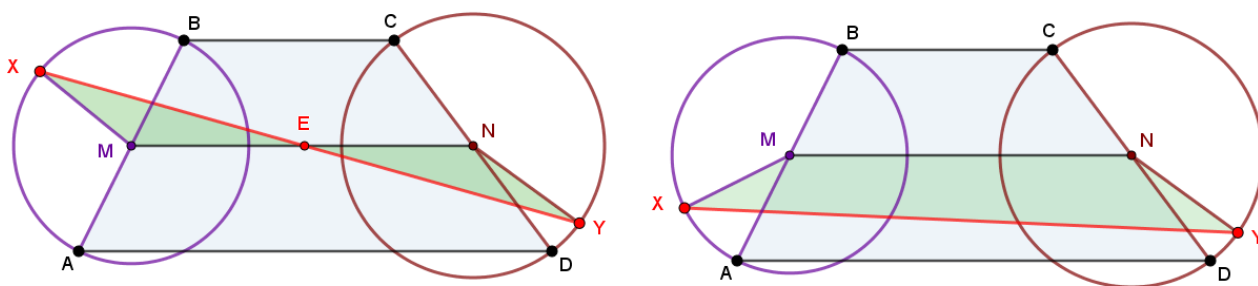
2. В бассейне (в стоячей воде) скорость Пети вдвое выше, чем скорость Васи. Но время, за которое Петя проплывает по реке от Пирса до Высокой сосны ровно такое же, какое тратит Вася, проплывая от Высокой сосны до Пирса. Во сколько раз быстрее доплывает Петя от Высокой сосны до Пирса, чем Вася в обратном направлении? (Кукина Е.Г.)

Решение: Скорость Васи X . Скорость Пети $2X$. Скорость Пети против течения $2X - V$ равна скорости Васи по течению $X + V$. Поэтому скорость течения реки $V = X/2$. По течению Петя плывет со скоростью $2.5X$, против течения Вася плывет со скоростью $0.5X$. Ответ в задаче: в пять раз быстрее Петя доплывает от ВС до П, чем обратно.

Критерии: Верное решение 7 баллов, верное решение с арифметической ошибкой – не более 5 баллов, найдено, соотношение $V = X/2$ – не менее 3 баллов, иначе 0 баллов.

3. Точки M и N середины боковых сторон трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Окружности w_1 и w_2 имеют центры в точках M , N и радиусы MB и NC соответственно. Пусть X и Y – произвольные точки на w_1 и w_2 . Докажите, что XY не превосходит половины периметра $ABCD$. (Иранская олимпиада по геометрии, Мещеряков Е.А.)

Решение: Пусть M и N центры окружностей w_1 и w_2 . Тогда XY не превосходит $XM + MN + NY = AB/2 + (BC + AD)/2 + CD/2 = P(ABCD)/2$, поскольку M и N середины сторон AB и CD и MN – средняя линия.



Критерии: Верное решение 7 баллов, получено неравенство $XY < XM + MN + NY$ - не менее 3 баллов, иначе 0 баллов.

4. На столе лежат карточки с числами 1, 2, ..., 23 и пустая коробка. Петя и Вася по очереди перекладывают по одной карточке в коробку, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода сумма в коробке впервые станет больше 200. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? (Шаповалов А.В.)

Решение: Петя берет карточку с 1, а затем выбирает карточку так, чтобы в сумме с предыдущим ходом Васи получилось 25. Таким образом после хода Пети будут получаться числа вида $25n+1$, то есть Петя первым получит число 201 и выигрывает.

Критерии: Любая обоснованная выигрышная стратегия для Пети – 7 баллов, если стратегия верна, но не обоснована – не более 5 баллов, иначе 0 баллов.

5. В вершинах тетраэдра записали 4 разных натуральных числа. На каждом ребре написали произведение этих чисел. В каждой грани записали произведение трех чисел в ее вершинах. Внутри тетраэдра записали число, равное произведению чисел во всех его вершинах. Все эти числа сложили и получили 2024. Какие числа были написаны в вершинах? (Кукина Е.Г.)

Ответ: 2, 4, 8, 14.

Решение:

мы	знаем	сумму
$a+b+c+d$	$ab+ac+ad+bc+bd+cd$	$abc+abd+acd+bcd+abcd$

$= 2024$.

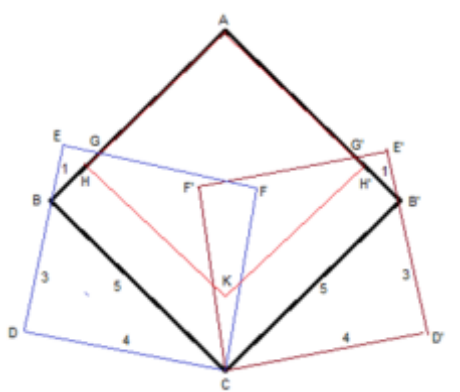
Поэтому $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) = 2025 = 25 \cdot 81 = 15 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3$. Почему по-другому не разбивается. Всего простых множителей 6 штук (2 одного типа, 4 другого). Надо в произведение 4 чисел. 6 чисел разбить на 4 кучки. Две (или даже 3) кучки по 1 числу - т.е. простые числа – это 3 и 5. И

больше простых нельзя. (потому что кроме 3 и 5 простых нет). Значит, два других будут составные: 15 и 9.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, получено разложение $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)=15*5*9*3$, но не обосновано, почему другое разложение невозможно – 5 баллов, приведен верный ответ с проверкой, что он подходит – 2 балла, пример без проверки - 1 балл; иначе 0 - баллов.

6. Помост для выступления Жасмин имеет форму квадрата 5х5 метров. У Аладдина есть три волшебных летающих ковра размера 4х4 метра. Может ли Алладин покрыть коврами весь помост, если ковры ни в коем случае нельзя резать? (Шаповалов А.В.)

Критерии: Обоснованный пример - 7 баллов, необходимо обосновывать перекрывание ковров в вершине С и то, что $BG > 1$ за отсутствие каждого из фактов -2 балла, иначе - 0 баллов.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

9 класс

1. На доске была написана правильная дробь. Петя прибавил к её числителю положительное число, а знаменатель менять не стал. А Вася отнял это число от знаменателя, а числитель менять не стал. Оказалось, что Петя и Вася получили равные числа. Какие? (Штерн А.С.)

Решение: Пусть исходная дробь a/b . Тогда после Пети – $(a+x)/b$, а после Васи – $a/(b-x)$, из условия: $(a+x)/b = a/(b-x)$, что равносильно $ab = ab + x(b-a-x)$, так как $x > 0$, то $b = a + x$. То есть Васина дробь, а значит и Петина, равна 1.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, только ответ без верного обоснования – 1 балл, иначе – 0 баллов.

2. У принца семимильные сапоги-скороходы. За 1 минуту они переносят принца на 7 миль. А сняв их, принц может идти со скоростью 1 миля в минуту. По дороге до принцессы 111 миль. За какое минимальное время принц доберется до принцессы? (Кукина Е.Г.)

Решение: Заметим, что за 15 минут в сапогах Принц пройдет 105 миль, и не попадет к Принцессе. Поэтому 15 минут Принцу не хватит. Пример за 16 минут: Принц делает 14 шагов в сапогах на 98 миль, а потом за 2 минуты проходит сторонам треугольника 7-7-13.

Критерии: Верное решение 7 баллов, оценка, что принцу потребуется не менее, чем 16 минут – 3 балла, пример на 16 минут – 3 балла, иначе 0 баллов.

3. Встретились как-то раз три ученика-волшебника из Хогвартса.

Белла сказала: среди этих двух нет волшебников.

Томми сказал: среди этих двух тут всего один волшебник!

А Мина сказала: среди этих двух оба волшебники.

А все дело в том, что слизеринцы грязнокровок за волшебников не считают! Кто из детей учится в Слизерине?

Кто из детей чистокровные волшебники?

Напомним, что Слизерин — это один из факультетов школы магии Хогвартс. (Кукина Е.Г.)

Решение. Заметим, что мысль кроме «2» может прийти в голову только слизеринцам. Так как эти мысли разные, значит, есть два слизеринца, один из которых чистокровка, один грязнокровка. И оставшийся человек – неслизеринец, и грязнокровка.

Ответ: Белла – Слизерин, чистокровка. Томми – слизерин, грязнокровка. Мина – не-Слизерин, грязнокровка.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, различные версии не полного перебора – не более 3-х баллов, иначе – 0 баллов.

4. Есть карточки с числами 1, 2, ..., 99. Петя и Вася по очереди берут по одной карточке и выкладывают их на стол. Каждый записывает после своего хода сумму всех выложенных чисел. Выигрывает тот, у кого сформируется самая длинная цепочка сумм, такая, что первая сумма делится на 1, вторая – на 3, третья – на 5 и т.д. (Усов С.В.)

Решение: Петя выбирает 50, потом дополняет ходы Васи до 100, итого после ходов Пети: 50, 150, 250, 350 и т.д. что делится на 1, 3, 5, 7 и т.д. Таким образом у Пети цепочка длины 50, что точно больше, чем у Васи.

Критерии: Любая обоснованная верная стратегия Пети – 7 баллов, если стратегия верна, но не обоснована – не более 3-х баллов, иначе – 0 баллов.

5. У квадратного трёхчлена ax^2+bx+c все коэффициенты различны и отличны от нуля. Петя переставил некоторым образом его коэффициенты. При этом ни один коэффициент не остался на своём месте, и получился трёхчлен с тем же дискриминантом. Докажите, что исходный трёхчлен имеет хотя бы один корень, меньший 1. (Штерн А.С.)

Решение: Обозначим через $P(x)=ax^2+bx+c$ исходный трёхчлен. При перестановке Петя мог получить bx^2+cx+a или cx^2+ax+b .

Пусть получилось bx^2+cx+a , тогда равенство дискриминантов даёт уравнение $b^2-c^2=4a(c-b)$, так как b и c различны, то $b+c=-4a$. Тогда $a+b+c=-3a$. Заметим, что в точках $-\infty$ и 1 $P(x)$ принимает значения разных знаков (a и $-3a$), поэтому между ними есть корень.

Пусть получилось cx^2+ax+b , тогда равенство дискриминантов даёт уравнение $b^2-a^2=4c(a-b)$, так как a и b различны, то $a+b=-4c$. Тогда

$a+b+c=-3c$. Заметим, что в точках 0 и 1 $P(x)$ принимает значения разных знаков (c и $-3c$), поэтому между ними есть корень.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, разобран лишь один вариант перестановки – 3 балла, иначе – 0 баллов.

Комментарии: тот факт, что квадратный трехчлен непрерывная функция и принимает все промежуточные значения считается очевидным.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, AD – высота. Внутри треугольника ABC отметили точку X такую, что угол AXB равен углу DXM и равны 90° . Докажите, что угол XMB в два раза больше угла MBC. (Иранская олимпиада по геометрии, Мещеряков Е.А.)

Решение: Обозначим через N – середину стороны AB, поскольку $MN \parallel BC$, то углы MBC и NMB равны. Поэтому достаточно доказать, что MN является биссектрисой угла XMB. Заметим, что AXDB вписанный, следовательно угол BXD равен углу BAD и дополняет ABC до 90° , кроме того угол $BXM = 180^\circ - ABC = BNM$, таким образом BNXM – вписанный. Поскольку $NA = BN = NX$, то углы опирающиеся на дуги BN и NX равны, то есть MN – биссектриса.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, продвижения оценивать исходя из их полезности для решения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

10-11 класс

1. Предположим, что Земля представляет собой идеальный шар радиуса 1 урш (урш – мера длины равная радиусу Земли). Гарри Поттер и Пивз находясь на северном полюсе стремятся попасть на экватор. Пивз, поскольку является привидением, может двигаться сквозь твердые предметы со скоростью 1 урш в день. А скорость Гарри равна $\sqrt{2}$ урш в день. Докажите, что Гарри прибудет на экватор раньше, чем Пивз. (Мещеряков Е.А.)

Решение: Если Гарри пойдет вдоль меридиана, то ему необходимо будет пройти $\pi/2$ урш, а Пивзу необходимо пройти не менее, чем $\sqrt{2}$ урш. Осталось заметить, что $\pi/(2\sqrt{2}) < \sqrt{2}$.

Критерии: Верное решение - 7 баллов, иначе 0 - баллов.

2. Докажите, что для любых вещественных a, b уравнение $(a+b)x^2 - 5ax - 10b = 0$ имеет корень не превосходящий 2.

Решение: Если $a+b=0$, то корень равен 2, и условие выполнено. Пусть $P(x) = (a+b)x^2 - 5ax - 10b$, заметим, что $P(2) = -6(a+b)$ и $P(-\infty)$ и $P(2)$ имеют разные знаки, а значит между ними есть корень.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, не разобран случай $a+b=0$ - 5 баллов, иначе – 0 баллов.

Комментарии: тот факт, что квадратный трехчлен непрерывная функция и принимает все промежуточные значения считается очевидным.

3. Петя проплывает по реке от Пирса до Высокой сосны втрое быстрее, чем обратно. Он знает, во сколько раз быстрее Васи он плавает в бассейне, поэтому с уверенностью утверждает, что Васе путь туда-обратно и вовсе не под силу. Во сколько раз Петя быстрее Васи в стоячей воде? (Кукина Е.Г.)

Решение: Скорость по течению $X+V$, скорость против течения $X-V$ (и это треть от скорости $X+V$). То есть, $3(X-V) = X+V$. $V = X/2$.

Скорость Васи (раз ему этот путь не под силу) меньше скорости реки.

Иначе утверждать с уверенностью, что он не доплывет, нельзя.

Значит, скорость Васи не менее чем вдвое меньше скорости Пети.

Критерии: Верное решение – 7 баллов, если в ответе "в два раза меньше" (и не неравенство) — то не более 5 баллов; иначе – 0 баллов.

4. Натуральное число называется полупростым, если сумма его цифр – простое число. Найдите наибольшее возможное количество последовательных полупростых чисел. (Штерн А.С.)

Решение: Три: 199, 200, 201. Оценка. Если одно из чисел кортежа делится на 3, значит, его сумма цифр три. Но тогда у него цифры – это нули, единицы и двоечки, и поэтому у следующего числа сумма цифр точно 4 (разряд не перескакивает). Поэтому после числа, делящегося на 3 в кортеже полупростых ничего быть не может. Поэтому максимум – 3 числа (2 перед делящимся на 3 быть в принципе).

Критерии: Верное решение – 7 баллов, получена оценка на число подряд идущих полупростых чисел – 3 балла, приведен пример – 2 балла, иначе – 0 баллов.

5. На столе лежат карточки с числами 1, 2, ..., 100 и пустая коробка. Петя и Вася по очереди перекладывают по одной карточке в коробку, начинает Петя. Если после хода игрока сумма чисел в коробке не однозначна и записывается одинаковыми цифрами (например 44, 222 или 3333), игрок получает от соперника такое количество рублей, и игра продолжается. Она заканчивается, когда все карточки будут в коробке. Кто из игроков может получить больше денег, чем отдать? (Шаповалов А.В.)

Решение: Выигрывает второй игрок. Стратегия: каждым ходом дополняем предыдущий ход первого до 101. Тогда после нашего хода делится на 101, после хода первого – никогда не делится на 101.

Таким образом числа $1111+2222+3333+4444=11110$ рублей – наши. И даже если все остальные красивые числа за первым, то он получает $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)(11+111) = 45*122=5490$ рублей. (а он, очевидно, даже этого добиться не сможет).*

Критерии: Верное решение – 7 баллов, показано, что второй может получить числа 1111, 2222, 3333 и 4444, но не обосновано почему первый не получит больше – 5 баллов, приведена, но не обоснована верная стратегия для второго – 4 балла, иначе – 0 баллов.

6. Можно ли квадрат 4x4 разрезать на три части и накрыть ими контур квадрата 5x5? (Шаповалов А.В.)

Решение: Можно. Контур квадрата разбивается на три двузвенные ломаные с прямым углом и длинами звеньев (4, 4), (5, 1) и (5, 1). Достаточно разместить такие ломаные внутри квадрата 4x4 так, чтобы у них не было общих точек. Разрежем этот квадрат на части так, чтобы каждая содержала ровно по одной ломаной. Наложим части

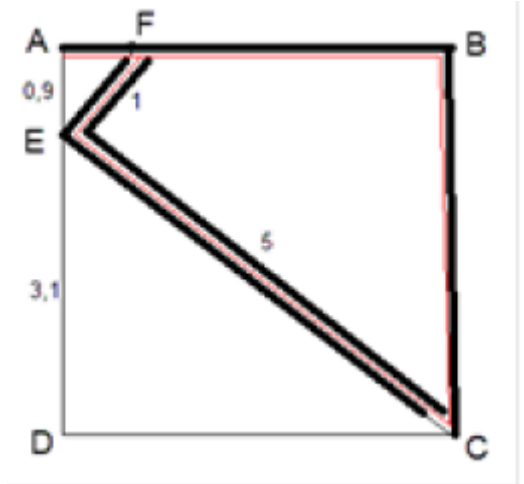
квадрата на контур 5x5 так, чтобы ломаные внутри частей совпали с частями контура.

Нужные ломаные можно расположить внутри и на контуре квадрата 4x4, например, так (см. рисунок). Возьмём квадрат ABCD со стороной 4. На стороне AD отметим точку E так, что $DE=3,1$, $AE=0,9$. Тогда

$$CE = \sqrt{4^2 + 3,1^2} > 5.$$

Проведем перпендикуляр EF к EC (F – его пересечение с AB). Из подобия

треугольников CDE и EFA видим $EF = CE \cdot AE / CD > 5 \cdot 0,9 / 4 > 1$. Звенья ломаной CEF длиннее 5 и 1, поэтому на ней можно расположить ломаную со звеньями длин 5 и 1 соответственно (на рисунке – жирная ломаная). Концы этой первой жирной ломаной не достают до сторон квадрата. Значит, её можно сдвинуть по горизонтали, и получить вторую жирную ломаную с такими же звеньями, не имеющую общих точек с первой и со сторонами квадрата. Третья жирная ломаная со звеньями длины 4 идёт по сторонам квадрата, например ломаная ABC на рисунке. Далее можно разрезать квадрат на 3 части, например, по красным линиям.



Критерии: Любое верное разрезание с обоснованием - 7 баллов; если разрезание верное, но обоснования нет и оно не очевидно - не более 5 баллов; иначе - 0 баллов.