МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

8 класс

1. В городе О Завод производит 10% загрязнения воздуха, а остальное загрязнение — от автомобилей. Но пессимистичные жители говорят всем, что половина загрязнения воздуха в городе О — от Завода. Вопрос: какую часть машин надо удалить из города, чтобы слова жителей стали правдой? (*Кукина Е.Г.*)

Ответ. 8/9 всех автомобилей.

Решение. Пусть x – общий объем загрязнений, тогда на Завод приходится $0{,}1x$, а на автомобили $0{,}9x$. После удаления части автомобилей суммарный объем загрязнений стал $0{,}2x$, так как Завод дает половину всех загрязнений. Таким образом, после удаления автомобилей объем загрязнений автомобилями уменьшился с $0{,}9x$ до $0{,}1x$, то есть автомобилей стало в 9 раз меньше.

Критерии. Верное решение – 7 баллов.

2. Докажите, что найдется 100 чисел n, таких что $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ делится на $(1+2+\ldots+n)^2$ (*Усов С.В.*)

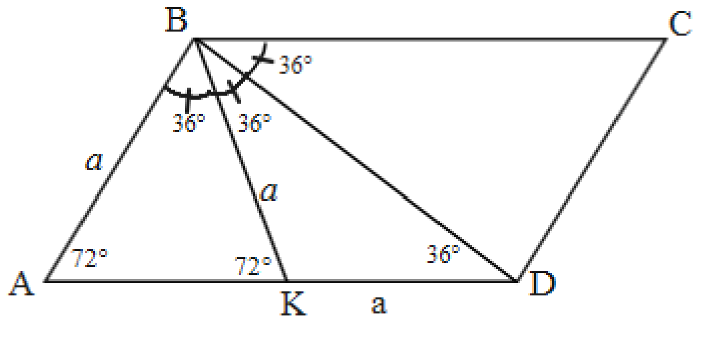
Решение. Подойдут все $n=12k+3$, k=1,2,…,100.

Действительно, $(1+2+\ldots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, поэтому достаточно доказать, что (n-1)! делится на n(n+1) ^{2} = n(n+1)(n+1)=3(4k+1)*2(6k+2)*4(3k+1), что делит (n-1)!, поскольку в разложении представлены различные натуральные числа, не превосходящие n.

Критерии. Задача сведена к делимости (n-1)! на n(n+1)(n+1) – 1 балл.
Предложен верный общий вид подходящих чисел (без доказательства, что они годятся) - дополнительно 2 балла.

3. Диагональ параллелограмма образует с его стороной угол в 36°, что составляет треть всего угла. Докажите, что отношение длины его большей стороны к длине меньшей не превосходит двух. (*Круглова И.А.*)

Решение.



Решение. ∠B=108°, следовательно ∠A=72° и ∠BKA=72°. ΔABK равнобедренный AB=BK=*a.* ΔBKD равнобедренный BK=KD=*a.*
Из ΔABK имеем: AK<AB=*a* (сторона лежащая против меньшего угла). AD=AK+KD<2*a.* Отсюда $\frac{AD}{AB} < 2$.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Выполнены дополнительные построения, позволяющие довести решение до полного и вычислены все углы (для полученной конфигурации) – 1 балл.

4. Назовем натуральное число особенным, если все его цифры различны, и при добавлении в его десятичную запись любой его цифры получается число кратное 3. Сколько существует особенных чисел? (*Адельшин А.В.*)

Ответ. 60.

Решение. Так как при добавлении любой цифры в запись числа получается число кратное трем, то все цифры имеют один и тот же остаток при делении на 3. Так как различных цифр с одинаковым остатком при делении на 3 не больше четырех, то числа могут состоять не более чем из четырех цифр.
Если число одно-, трех- или четырехзначное, то все его цифры должны быть кратны трём.
Таким чисел: однозначных – 3; трехзначных – $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$; четырехзначных – $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.
Если же число двузначное, то его цифры просто должны иметь одинаковый остаток при делении на 3. Если этот остаток равен 0, то таких чисел – $3 \cdot 3 = 9$; если остаток равен 1, то чисел – $3 \cdot 2 = 6$; если остаток равен 2, то чисел – $3 \cdot 2 = 6$. Итого общее количество чисел равно 60.

Критерии. Доказано, что все цифры имеют одинаковый остаток при делении на 3 – 1 балл. Доказано, что особые числа максимум четырехзначные - ещё 1 балл. Верно посчитано количество чисел в трёх случаях из четырёх - не более 4 баллов за всю задачу. Разобран случай, когда все цифры числа кратны трем, в этом случае правильно вычислено количество особенных чисел – 2 балла. Полное решение с арифметической ошибкой в конце – 6 баллов.

5. Всякая клетка поля 2×1000 (1000 рядов по две клетки в каждом) черная либо белая. Причем в каждом ряду обе клетки - одного цвета: в первом ряду они белые, в последнем - черные. В отмеченную клетку первого ряда ставят хомяка. Если хомяк стоит на черной клетке, то делает шаг вбок, на клетку того же ряда, если на белой - то вперёд, на клетку следующего ряда. Освобождаемая хомяком клетка меняет цвет. Когда первый хомяк покинул поле с последнего ряда, в отмеченную клетку запускают второго хомяка, затем - третьего. Кто пройдет поле за меньшее число шагов - первый, второй или третий хомяк? (*Усов С.В.*)

Ответ. Второй хомяк.

Решение. В каждом ряду обе клетки либо белые, либо чёрные. Пусть хомяков запускают в левую клетку первого ряда. Тогда первый и третий хомяки покинут первый ряд с левой клетки (за один ход), второй хомяк – со второй (поскольку после первого хомяка отмеченная клетка поменяла цвет на чёрный, ему потребуется два хода).

Далее первый хомяк, попадая на белый ряд, за один ход проходит дальше (посещённая клетка становится чёрной), а попадая на чёрный ряд, тратит три хода: шаг в соседнюю клетку, шаг назад (поскольку соседняя тоже чёрная) и, наконец, шаг в следующий ряд снова с той клетки, на которую пришёл (и которая вновь становится чёрной). Получается, первый хомяк продолжает движение по левой полосе, всего ему потребуется не менее 1002 шагов (поскольку последний ряд – точно черный).

Второй же хомяк, оказавшись на правой полосе еще в первом ряду, также продолжит по ней движение: клетки в бывших белых рядах в правой полосе по-прежнему белые, в бывших черных рядах – стали белыми после блужданий первого хомяка. Таким образом, он справится ровно за 1001 шаг. После его прохода все клетки в правой полоске почернели.

Наконец, третий хомяк стартует с белой отмеченной клетки, но все остальные клетки поля после прохода двух первых хомяков стали черными, и ему потребуется 2998 ходов на завершение маршрута!

Критерии. Обосновано, как будет раскрашено поле после прохода первого хомяка (при этом установлено, что он движется по одной полосе) - 2 балла (при недостаточных обоснованиях - 1 балл)

Обосновано, как будет раскрашено поле после прохода второго хомяка (при этом установлено, что он движется по другой полосе) - 2 балла

Для одного хомяка верно посчитано число шагов - по 1 баллу за хомяка. Либо для пары хомяков произведено сравнение числа шагов - также по 1 баллу за пару.

Прочие критерии:

Полностью решена задача - 7 баллов. При не влияющих на решение арифметических и прочих мелких неидейных ошибках - 6 баллов.

Разбор задачи проведён на примере, при этом раскраски после прохода 2-го и 3-го хомяков правильные - не более 3 баллов.

6. На плоскости проведены 500 прямых. Среди любых 26 из них найдётся 6 параллельных друг другу. Докажите, что среди любых 22 прямых найдутся параллельные. (*Шаповалов А.В.*)

Решение. Разобьем прямые на группы параллельных друг другу. Есть группа с не менее чем 6 прямыми. Допустим, есть не менее 22 групп. Заведомо есть группа с не менее чем 6 прямыми. Выбрав из неё 5 прямых и по одной прямой из 21 другой группы, мы получим набор из 26 прямых без 6 параллельных. Противоречие. Значит, групп не более 21. По принципу Дирихле две прямые из 22 принадлежать одной группе, то есть параллельны.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Если утверждается, что из любых 26 прямых, после выбрасывания 4-х, остается набор, содержащий две параллельные – 3 балла.

9 класс

1. В городе О Завод производит 10% загрязнения воздуха, а остальное загрязнение — от автомобилей. Но пессимистичные жители говорят всем, что половина загрязнения воздуха в городе О — от Завода. Вопрос: какую часть машин надо удалить из города, чтобы слова жителей стали правдой? (*Кукина Е.Г.*)

Ответ. 8/9 всех автомобилей.

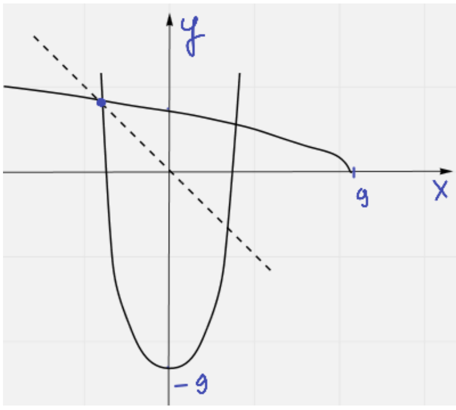
Решение. Пусть *x* – общий объем загрязнений, тогда на Завод приходится 0,1*x*, а на автомобили 0,9*x*. После удаления части автомобилей суммарный объем загрязнений стал 0,2*x*, так как Завод дает половину всех загрязнений. Таким образом, после удаления автомобилей объем загрязнений автомобилями уменьшился с 0,9*x* до 0,1*x*, то есть автомобилей стало в 9 раз меньше.

Критерии. Верное решение – 7 баллов.

2. Найдите отрицательный корень уравнения $\sqrt{9-x} = x^2 - 9$. (*Круглова И.А.*)

Ответ. $x = \frac{-1-\sqrt{37}}{2}$

Решение.



Рассмотрим функции $y_1 = \sqrt{9-x}$ и $y_2 = x^2 - 9$. График $y = \sqrt{9-x}$ и левая ветвь параболы симметричны относительно прямой $y = -x$. (функции $y_1(-x) = \sqrt{9+x}$ и $y_2(-x) = x^2 - 9$ взаимообратные)

Для нахождения отрицательного корня достаточно пересечь графики $y = x^2 - 9$ и $y = -x$. Уравнение $x^2 + x - 9 = 0$ имеет один отрицательный корень $x = \frac{-1-\sqrt{37}}{2}$.

Критерии. Задача сведена к решению уравнения 4-ой степени, без решения уравнения – 0 баллов. Задача сведена к симметричной системе двух уравнений с двумя неизвестными – 2 балла. Если решение системы сведено к совокупности двух линейных уравнений – 4 балла. Арифметические ошибки не влияющие на идею решения – снимать не более 2 баллов. Верное решение -7 баллов.

3. Найдите наибольшее значение самого маленького угла треугольника, если одна из его сторон в два раза длиннее другой. (Мещеряков Е.А.)

Ответ. 30°.

Решение. Пусть ABC искомый треугольник, причем AC=2AB. Заметим что, так как BC>AC-AB=AB, то AB – наименьшая сторона треугольника, а значит, ∠ACB будет наименьшим углом. Построим отрезок AC и окружность - Ω, с центром в точке A и радиусом равным 0,5AC. Точка B обязана лежать на этой окружности. Прямая CB обязана иметь общую точку с окружностью Ω, но если ∠ACB будет слишком велик, то CB не будет пересекать Ω. Набольший угол реализуется в случае, когда CB касательная к окружности Ω. Таким образом, ABC – прямоугольный треугольник с катетом в два раза большим гипотенузы, откуда ∠ACB=30^o.
Критерии. Утверждение типа «если ∠ACB будет слишком велик, то CB не будет пересекать Ω» - считается очевидным. Показано, что наименьший угол напротив стороны которая в два раза меньше другой – 1 балл. Доказано, что искомый треугольник прямоугольный – 5 баллов.

4. На доске написано число 202112. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо заменить в числе одну цифру, увеличив или уменьшив её на 1. Нельзя получать числа, кратные 3 и числа, которые уже встречались ранее. Кто не сможет сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Шаповалов А.В.*)
Ответ: Вася.
Решение. Сумма цифр исходного числа равна 8, меняется при каждом ходе на 1 и не может быть кратна 3. Значит, чередуются суммы цифр 8 и 7, и Петя своим ходом уменьшает цифру, а Вася – увеличивает. Тогда игроки не могут менять только что измененную цифру, иначе восстановится предыдущее число. Первый ход Пети не меняет цифру 0, значит, своим ходом Вася может её увеличить. Тогда Петя опять не может её менять, и Вася опять может её увеличить, и т.д. Такое увеличение Вася может сделать 9 раз. Петя же обязан уменьшать другие цифры, а так как их сумма равна 8, он сделает не более 8 ходов, а 9-й ход сделать не сможет.
Критерии. Показано, что сумма цифр числа может принимать только два значения, 7 и 8 – 1 балл. Показано, что Петя может только уменьшать цифры - ещё 1 балл. Предложена верная стратегия для Васи, дальнейших продвижений нет - еще 1 балл, то есть 3 балла максимум.

5. На плоскости проведены 500 прямых. Среди любых 26 из них найдётся 6 параллельных друг другу. Докажите, что среди любых 22 прямых найдутся параллельные. (*Шаповалов А.В.*)
Решение.
Разобьем прямые на группы параллельных друг другу. Есть группа с не менее чем 6 прямыми. Допустим, есть не менее 22 групп. Заведомо есть группа с не менее чем 6 прямыми. Выбрав из неё 5 прямых и по одной прямой из 21

другой группы, мы получим набор из 26 прямых без 6 параллельных. Противоречие. Значит, групп не более 21. По принципу Дирихле две прямые из 22 принадлежать одной группе, то есть параллельны.

Критерии. Верное решение – 7 баллов.

6. Клетки поля 2×1000 (1000 рядов по две клетки в каждом) покрашены в черный и белый цвета, в первом ряду обе клетки белые. В клетку первого ряда ставят хомяка. Если хомяк стоит на черной клетке, то делает шаг вбок, на клетку того же ряда, если на белой - то вперёд, на клетку следующего ряда. Освобождаемая хомяком клетка меняет цвет. Когда первый хомяк прошел и покинул поле, на поле (в ту же клетку) запускают второго хомяка, затем - третьего. Кто пройдет поле быстрее - первый, второй или третий хомяк, если первому потребовалось ровно 2000 шагов, чтобы покинуть поле? (*Усов С.В.*)

Ответ. Второй хомяк.

Решение. Возможны 4 варианта комбинаций цветов клеток в ряду: бб, бч, чб, чч (первая буква отвечает не левой клетке, а клетке, на которую встал первый хомяк, т.е. бч - значит в ряду 1 белая и 1 черная клетки, первый хомяк встал на белую; вторая буква означает цвет клетки, на которую позже придёт второй хомяк – почему она всегда отличается от клетки, на которую приходит первый, будет пояснено ниже). Посмотрим, как хомяки проходят эти ряды.

а1) бб, первый ряд. Первый хомяк встаёт на белую, следующим ходом идёт вперёд, и клетка становится чёрной. Второй хомяк стартует с той же клетки (теперь чёрной), поэтому чтобы покинуть ряд, ему нужно будет сделать шаг в сторону - потребуется лишний ход. Хомяки встанут на разные клетки следующего ряда. Третий хомяк покинет первый ряд снова за один ход, поскольку клетка, куда его поставят, стала белой после ухода с неё второго хомяка. Далее предполагаем, что первый и второй хомяки пришли на различные клетки рассматриваемого ряда, и показываем, что уйдут на следующий ряд они также с различных клеток.

а2) бб, не первый ряд. Оба хомяка преодолеют его за один ход (поскольку придут на разные клетки его), после чего ряд станет чч.

б) бч. Первый хомяк проходит ряд за один ход, превращая его в чч. Второму потребуется 3 хода: пришел на черную, сделал шаг в сторону (клетка теперь белая). Там тоже черная - снова шаг в сторону, на исходную клетку, которая уже белая, и хомяк третьим ходом переходит на следующий ряд, по прежнему не в те клетку, в которую с этого ряда ходил первый хомяк. Ряд после прохождения вторым хомяком вновь стал бч.

с) чб. Первый пришел на черную, сделал шаг в сторону (исходная черная стала белой), после чего вторым ходом покинул ряд с белой клетки (она становится черной, то есть раскраска станет бч). Второй хомяк приходит не та ту клетку, что и первый, то есть на ставшую черной, и также совершает два хода, меняя раскраску ряда на чб.

д) чч. Здесь первому хомяку потребуется уже 3 хода, причем покинет он ряд с той же клетки, на которую пришел, изменив раскраску на чб. Второй приходит на белую клетку и покидает ряд в один ход – раскраска становится чч.

Пусть а, б, с, д - соответственно количество рядов вида бб, бч, чб, чч. Тогда (если забыть про потерю хода вторым хомяком на первом ряду) первый сходил $а+б+2с+3д=2000$ раз, а второй $а+3б+2с+д$ раз, то есть второй сходил на $2(д-б)$ раз меньше. Но $а+б+с+д=1000$, откуда $а+б=д$, то есть $б<д$ (ряд бб по условию точно есть - это первый ряд, то есть $а>0$!), откуда $2(д-б)$ не меньше 2. Даже с учетом потери вторым хомяком хода на первом ряду, он доберется быстрее.

Поскольку раскраска рядов перед ходом третьего хомяка такая же, как перед ходом первого (и только все ряды бб кроме первого теперь стали чч), третий хомяк повторит траекторию первого, тратя на бывшие ряды бб (кроме первого) три шага вместо одного, а значит, ему потребуется не меньше шагов, чем первому.

Критерии. Обосновано, что второй хомяк пойдет по траектории, "симметричной" первому – 2 балла.

Обосновано, что третий хомяк пойдет по той же траектории, что и первый – 2 балла.

Для пары хомяков верно посчитано, какой пройдет поле быстрее – 1 баллу за каждую пару хомяков.

Полное решение – 7 баллов.

10-11 класс

1. Вася проплыл от Пирса до Высокой сосны по реке и вернулся назад. При этом его фитнес-браслет показывает, что путь туда был 2 км, а путь обратно 10 км. На каком расстоянии находится Высокая сосна от Пирса? (*Кукина Е.Г.*)

Ответ:

Решение. Финтнес-браслет показывает путь как произведение потраченного времени на скорость пловца. Пусть x – скорость пловца, y – скорость течения и S – расстояние от Пирса до Высокой сосны. Тогда $\begin{cases} x\cdot\frac{S}{x+y}=2, \\ x\cdot\frac{S}{x-y}=10. \end{cases}$ Откуда S=10/3 км.

Критерии. Верное решение -7 баллов.

2. Дан многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$. На сторонах A_1A_2, A_2A_3,…, A_nA_1 отмечены точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что выполнены равенства $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=\ldots=\frac{A_nB_n}{B_nA_1}$. Далее для каждой вершины A_k проводят вектор $\overrightarrow{A_kB_j}$, причем каждая вершина используется ровно один раз. Докажите, что сумма полученных векторов равна нулю. (*Задворнов В.*)

Решение. Пусть $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{A_2B_2}{B_2A_3}=\ldots=\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=t$, тогда $\overrightarrow{A_kB_j}=\overrightarrow{A_kA_j}+\overrightarrow{A_jB_j}=\overrightarrow{A_kA_j}+\frac{t}{t+1}\overrightarrow{A_jA_{j+1}}$.

Осталось заметить, что, так как индексы *k* и *j* пробегают множество $\{1,2,\ldots,n\}$, причем каждое значение встречается по одному разу, то сумма всех векторов равна нулю.

Критерии. Сумма векторов верно разложена в два слагаемых (как в решении) – 1 балл.

Показано, что одно из этих слагаемых равно нулю - ещё 2 балла.

3. Докажите, что найдется бесконечное количество чисел *n* таких, что произведение от 1 до *n* делится $(n+1)^{2021}$. (*Усов С.В.*)

Решение 1. Подойдут все $n=(k!)^{2021}-1$, *k* – натуральное. Достаточно доказать, что *n*! делится на $(k!)^{2021}$, а это так, поскольку все числа вида $a\cdot k!+m$, где *a*=0,1,…,2020, различны (их в точности 2021 штук для фиксированного *m*) и не превосходят $n=(k!)^{2021}-1$, то есть являются различными сомножителями в *n*!, кроме того они кратны *m*=1,2,…,*k*, а значит их произведение кратно $(k!)^{2021}$.

Решение 2. Подойдут все числа вида $n = k^{4043} - 1$, *k* – простое. Действительно, тогда $n+1 = k^{4043}$ представляется в виде произведений вида $k^m \cdot k^{4043-m} \cdot 2021$ различным способом (*m*=1,2,…,2021), при чем все такие числа являются различными сомножителями *n*!, поскольку не превосходят *n*.
Критерии. Верное решение – 7 баллов.

4. S_1 и S_2 - вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон AB и AC соответственно, причем их линия центров параллельна биссектрисе ∠HCB, где H - точка касания S_1 и окружности, вписанной в ΔABC. Найдите отношение площадей круга S_2 и треугольника ABC. (*Усов С.В.*)
Ответ. π.
Решение. Пусть O - центр S_1, I - центр вписанной в ΔABC окружности. Оба центра лежат на биссектрисе ∠C, также на линии центров OI лежит и точка H касания этих окружностей со стороной AB, таким образом биссектриса ∠C совпадает с прямой OI, а значит CH – высота к стороне AB, и ΔACB – равнобедренный (BC=AC).
Биссектрису угла HCO назовем CD. Центры S_1 и S_2 лежат на биссектрисе внешнего угла A, которая перпендикулярна биссектрисе AI соответствующего внутреннего угла. ∠OHA=90°, ∠OAI=90° $\Rightarrow$ ∠HOA=90° –∠OAH= ∠HAI. Тогда ∠HCA=∠HCB=2∠HOA (по равенству накрестлежащих углов при параллельных прямых AO, CD и секущей CO) = 2∠HAI=∠HAC $\Rightarrow$CH=AH=BH $\Rightarrow$ ∠C=90°, поскольку проведенная из него медиана равна половине стороны, на которую она опущена.
Обозначим точки касания окружности S_2 с прямыми, на которых лежат стороны треугольника ABC: X – на прямой AB, Y – на стороне AC, Z – на прямой BC. Тогда по свойствам общих касательных AX=AY, CY=CZ, BX=BZ $\Rightarrow$ BA+AY=CY+BC, но BC=AY+YC $\Rightarrow$ AB=2CY. Площадь прямоугольного равнобедренного треугольника ABC равна квадрату половины его гипотенузы, то есть CY^2.
Но CY - радиус S_2, поскольку ∠YCZ прямой и радиуса, проведенные в точку касания, также образуют с касательными прямые углы – получаем квадрат. Значит, площадь ABC - квадрат радиуса окружности. Таким образом, искомое отношение площадей равно π.
Критерии. Доказано, что ABC равнобедренный – 1 балл. Доказано, что ABC - прямоугольный – 2 балла. Доказано, что AB=2CY – 2 балла.

5. На коралловом атолле живут 8 рыбок Дори. В 10:00 мимо них проплывала старая черепаха и рассказала каждой из рыбок ровно одну новость. Все новости разные. Каждый час каждая из Дори пересказывает все новости, какие знает, одной собеседнице. Потом ищет новую – и рассказывает ей(т.е. с 11-00 до 12-00 одна беседа, с 12-00 до 13-00 другая беседа и т.д.). Но вот беда: рыбки Дори все забывают и помнят только те новости, которые узнали

(или, возможно, услышали снова) в последней или предпоследней беседе. Вопрос: через какое минимальное время все Дори могут узнать все новости? (*Кукина Е.Г.*)
Ответ: Через 5 часов (к 15.00).

Решение. К 11-00 каждая из рыбок знает максимум по одной новости. К 12-00 максимум по 2 (одна старая и одна новая). К 13-00 максимум по 3 (одна, которая бывшая новая, и плюс 2 новых из новой беседы). К 14-00 аналогично максимум 5 новостей Таким образом, рыбки не могут узнать все новости ранее, чем в 15-00. Покажем, что к 15-00 они могут узнать все новости:

	Первая		Вторая		Третья		Четверт.		Пятая		Шестая		Седьм.		Восьмая	
К11	A		B		C		D		E		F		G		H	
К12	A	B	B	A	C	D	D	C	E	F	F	E	G	H	H	G
К13	B	CD	A	EF	D	AB	C	GH	F	AB	E	GH	H	EF	G	CD
К14	CD	EGH	EF	CGH	AB	EFH	GH	AEF	AB	GCD	GH	BCD	EF	ABD	CD	FAB

Здесь A-H названия новостей. В правой графе «свежие новости», которые рыбка узнала в последней беседе, в левой графе «старые новости», которые рыбка забудет после следующей беседы (если не обновит про них знание, конечно). Цветом выделены рыбки, которые общаются между собой. Т.е. с 11-00 до 12-00 первая общается со второй. С 12 до 13 с третьей, с 13 до 14 с После этого, в следующих беседах рыбки будут пересказывать друг другу все 8 новостей и более ничего не забудут!

Критерии. Приведен пример когда Дори узнают все новости к 15.00, без каких либо обоснований – 4 балла. Приведена оценка, то есть показано, что Дори не смогут узнать все новости ранее, чем в 15.00 – 3 балла. Верное решение – 7 баллов.

6. На плоскости проведены 500 прямых. Среди любых 26 из них найдётся 6 параллельных друг другу. Докажите, что среди любых 66 из них найдутся не менее 14 параллельных друг другу. (*Шаповалов А.В.*)

Решение. Разобьем прямые на группы параллельных друг другу. Назовем группы с 6 или более прямыми большими, остальные – малыми. Пусть есть b больших групп, а в малых всего m прямых. Добавив к этим m прямым по 5 прямых из каждой большой группы, получим набор без 6 параллельных прямых. Значит, $m+5b<26$. Тем более $5b<26$ и $b\leq5$. Теперь, если даже взять все прямые из малых групп и по 13 прямых из больших групп, мы получим $m+13b=(m+5b)+8b<26+8\cdot5=66$ прямых. Значит, из какой-то большой группы взято не менее 14 параллельных прямых.

Критерии. Верное решение – 7 балов.