МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

8.12.24

8 класс

1. Вася, придя на остановку, увидел, что автобус будет только через 10 минут, тогда он решил пройти одну остановку по пути автобуса. За 10 минут Вася пришел на следующую остановку и увидел, что автобус приедет через 5 минут. Во сколько раз Вася медленнее автобуса? (Мещеряков Е.А.)

Ответ: в два раза.
Решение: За 10 минут которые потребовались Васе, чтобы дойти от первой до второй остановки автобус проделал путь до первой остановки. Так как до второй остановки автобусу ехать 5 минут, то 5 минут нужно автобусу, чтобы доехать от первой остановки до второй, а Вася проделал этот путь за 10 минут. Таким образом Вася в два раза медленнее автобуса.
Критерии: замечено, что когда Вася на второй остановке, автобус на первой - 3 балла; верное решение - 7 баллов.

2. В ряд сцеплены 3 шестерёнки, у которых в сумме 111 зубьев (одинаковой формы и размера). Если первую шестерёнку повернуть на 4 оборота, то вторая сделает 5 полных оборотов, а третья - 6 полных оборотов. Сколько зубьев у каждой шестерёнки? (Усов С.В.)

<u>Ответ</u>: 45-36-30.
<u>Решение</u>: На второй меньше зубьев, чем на первой, и отношение количества зубьев 5:4. Отношение первой к третьей 6:4. Приводим все к “общему знаменателю”. 30:24:20 = 15:12:10. (суммарное количество частей 37, что в 3 раза меньше, чем 111). На первой 45 зубьев, на второй 36, на третьей 30.
<u>Альтернативное решение</u>: На первой шестеренке x зубьев, на второй y, на третьей z. Когда первая шестеренка делает 4

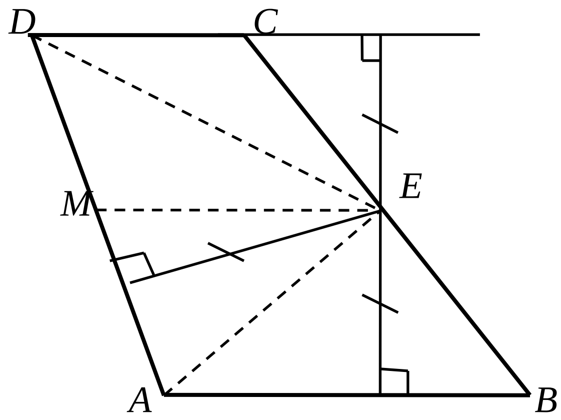
оборота – проходит 4x зубьев, что равно по условию 5y и 6z. Получаем уравнения: 4x=5y=6z, x+y+z=111. Решаем (например, выражаем y и z через x, подставляем во второе), получаем 45-36-30.

Критерии: Правильное решение 7 баллов. Правильный ответ с проверкой без дальнейших пояснений – 1 балл.

Критерии к первому решению. За каждое из отношений 5:4 и 6:4 по 1 баллу (суммируются). Найдено правильно соотношение 15:12:10 – 4 баллов. Если найдены верные соотношения 5:4 и 6:4, но получен неверный ответ - 5 баллов.

Критерии к альтернативному решению: составлено первое (двойное) уравнение – 2 балла. (система – тоже два балла, потому что второе уравнение ни о чем)

3. В четырехугольнике ABCD прямые AB и CD параллельны. Точка E на стороне BC равноудалена от прямых AB, AD и CD, M - середина AD. Докажите, что AM=ME. (Мещеряков Е.А.)



Решение: Так как точка E равноудалена от AB и AD, то AE - биссектриса угла BAD, аналогично DE - биссектриса ADC. В силу параллельности AB и CD сумма углов BAD и ADC равна 180^o, поэтому сумма углов EAD и EDA равна 90^o, следовательно угол AED - прямой. Так как EM - медина из прямого угла прямоугольного треугольника AED, то EM=1/2AD=AM.

Критерии: Следующие критерии суммируются: замечено, что AE (DE) биссектриса по 1 баллу, EM - средняя линия - 1 балл, показано, что AED - прямоугольный - 1 балл; верное решение - 7 баллов. За отсутствие обоснования, что медиана равна половине гипотенузы баллы не снимать.

4. За круглым столом чётное число детей. Соседями считаем тех, кто сидит рядом или строго напротив. У каждого хотя бы два соседа-мальчика. Докажите, что девочек за столом не более трети. (Шаповалов А.В.)

Решение: Пусть за столом d девочек, n детей. От каждой девочки проведём три стрелки к её соседям, всего 3d стрелок. Концы стрелок не совпадают, иначе у кого-то среди соседей большинство девочек. Значит, 3d≤n, откуда d≤n/3.

Критерии: верное решение, но не обосновано, что концы стрелок различны - 4 балла; верное решение - 7 баллов.

5. Дана доска n*n шахматной раскраски. За ход разрешается выбрать клетку и перекрасить все клетки на диагоналях с выбранной клеткой (выбранная клетка не перекрашивается): черный становится белым, белый становится чёрным. Всегда ли можно за несколько ходов сделать доску белой? (Усов С.В.)

Ответ: не всегда.
Решение: Рассмотрим доску с нечётной стороной, у которой нечётное количество чёрных клеток. Чтобы каждая чёрная клетка сменила цвет, суммарное количество перекрашиваний должно быть нечётным. Однако любой ход меняет цвет у чётного числа клеток.
Действительно, рассмотрим клетку, расстояние от которой до ближайшей стороны по вертикали равно x клеток, а до ближайшей стороны по горизонтали - y клеток. Не ограничивая общности, считаем, что x не превосходит y. Тогда при выборе этой клетки суммарно перекрасятся x+x+y+(n-1-y)=2x+n-1 клеток, где n нечётно.

Критерии: Правильное решение - 7 баллов.

Только верное обоснование для малого нечётного n (кроме n=1) с необоснованным выводом, что для всех (больших) нечётных *квадратов будет та же картина - 2 балла (баллы не суммируются с тем, что ниже).*

Заявлено, что суммарное количество перекрашиваний (на подходящей доске, см. решение) должно быть нечётным - 2 балла. (Сам факт считать не требующим обоснования.)
Если к тому же заявлено (без достаточного обоснования), что каждый ход меняет цвет чётного числа клеток - ещё 1 балл.

Если только доказано, что любой ход на нечётной (чётной) доске перекрашивает чётное (нечётное) число клеток - 3 балла (баллы не суммируются с тем, что выше).

6. На плоскости проведены несколько прямых и отмечены все точки пересечения. Назовём прямую “ровной”, если по обе стороны от неё отмеченные точки есть, и их – поровну. Может ли более 90% прямых оказаться “ровными”? (Шаповалов А.В.)

Решение: Проведём 20 прямых через общую точку O, и ещё пару прямых, симметричных относительно O. Все точки пересечения разбиваются на пары симметричных относительно O. Каждая пара лежит по разные стороны от любой прямой m, проходящей через O, поэтому m – “ровная”. 20/22>90%.
Критерии: Приведен пример верность которого не очевидна - 0 баллов. Описана конструкция, но не указано общее число прямых (например есть индуктивная конструкция построения примера, но не сказано сколько нужно прямых), а также есть упущения в обосновании “ровности” нужных прямых - 3 балла Приведен верный пример, но не обоснована его верность - 4 балла. Верное решение - 7 баллов. Если в верном решении не обосновано, что 20/22 это больше, чем 0,9 (или аналогичное неравенство), то баллы не снимать.

9 класс

1. Дом Вовы находится между остановками A и B, на расстоянии 50 метров от остановки A и 150 метров от остановки B. Выйдя из дома,

Вова заметил автобус, выезжающий из-за поворота. Он пошел навстречу автобусу, на остановку А, при этом оказался на остановке одновременно с автобусом. В другой день, выйдя из дома и заметив автобус в том же месте, Вова пошел на остановку В и также оказался на остановке одновременно с автобусом. Во сколько раз автобус быстрее Вовы? (Мещеряков Е.А.)

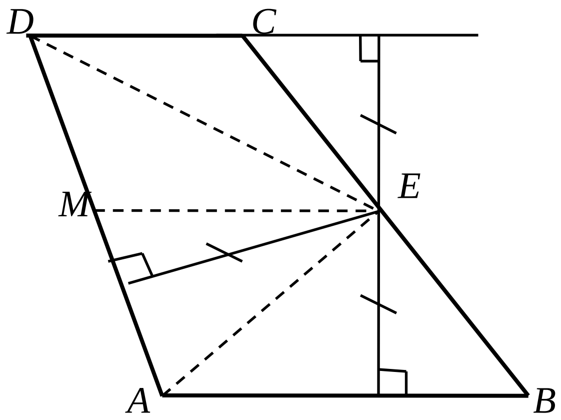
Ответ: в два раза.
Решение: Пусть v - скорость автобуса, а t (минуты) - время которое требуется автобусу, чтобы доехать от поворота до остановки А. Тогда расстояние от поворота до А равно vt, скорость Вовы - 50/t (метры/минуты), так как за время t Вова проходит 50 метров. До остановки В Вова идет 3t минут (150:(50/t)), за это время автобус проезжает 3vt=vt+200 метров, откуда vt=100 и v=100/t. Таким образом автобус в (100/t):(50/t)=2 раза быстрее Вовы.
Критерии: верный ответ - 0 баллов; получена верная системы уравнений, но не решена - 3 балла; верное решение - 7 баллов.

2. В ряд сцеплены 3 шестерёнки, у которых в сумме 111 зубьев (одинаковой формы и размера). Если первую шестерёнку повернуть на 4 оборота, то вторая сделает 5 полных оборотов, а третья - 6 полных оборотов. Сколько зубьев у каждой шестерёнки? (Усов С.В.)

Решение: (копия из 8 класса)
<u>Ответ</u>: 45-36-30.
<u>Решение</u>: На второй меньше зубьев, чем на первой, и отношение количества зубьев 5:4. Отношение первой к третьей 6:4. Приводим все к “общему знаменателю”. 30:24:20 = 15:12:10. (суммарное количество частей 37, что в 3 раза меньше, чем 111). На первой 45 зубьев, на второй 36, на третьей 30.
<u>Альтернативное решение</u>: На первой шестеренке x зубьев, на второй y, на третьей z. Когда первая шестеренка делает 4 оборота – проходит 4x зубьев, что равно по условию 5y и 6z. Получаем уравнения: 4x=5y=6z, x+y+z=111. Решаем (например, выражаем y и z через x, подставляем во второе), получаем 45-36-30.

Критерии: Правильное решение 7 баллов. Правильный ответ с проверкой без дальнейших пояснений – 1 балл.
Критерии к первому решению. За каждое из отношений 5:4 и 6:4 по 1 баллу (суммируются). Найдено правильно соотношение 15:12:10 – 4 баллов. Если найдены верные соотношения 5:4 и 6:4, но получен неверный ответ - 5 баллов.
Критерии к альтернативному решению: составлено первое (двойное) уравнение – 2 балла. (система – тоже два балла, потому что второе уравнение ни о чем)

3. В четырехугольнике ABCD прямые AB и CD параллельны. Точка E на стороне BC равноудалена от прямых AB, AD и CD, M - середина AD. Докажите, что AM=ME. (Мещеряков Е.А.)



Решение: Так как точка E равноудалена от AB и AD, то AE - биссектриса угла BAD, аналогично DE - биссектриса ADC. В силу параллельности AB и CD сумма углов BAD и ADC равна 180^o, поэтому сумма углов EAD и EDA равна 90^o, следовательно угол AED - прямой. Так как EM - медина из прямого угла прямоугольного треугольника AED, то EM=1/2AD=AM.

Критерии: Следующие критерии суммируются: замечено, что AE (DE) биссектриса по 1 баллу, EM - средняя линия - 1 балл, показано, что AED - прямоугольный - 1 балл; верное решение - 7 баллов. За отсутствие обоснования, что медиана равна половине гипотенузы баллы не снимать.

4. За круглым столом чётное число детей. Соседями считаем тех, кто сидит рядом или строго напротив. У каждого хотя бы два соседа-мальчика. Детей пересадили по другому. Докажите, что детей, у которых есть две соседки, не более половины. (Шаповалов А.В.)

Решение: Пусть за столом d девочек, n детей. После пересадки от каждой девочки проведём три стрелки к её соседям, всего $3d$ стрелок. У них $3d \le n$ концов. У ребёнка с хотя двумя соседками хотя бы два таких конца, поэтому таких детей не более $n/2$.
Критерии: рассмотрены частные случаи - 0 баллов; верное решение - 7 баллов.

5. Петя придумал новое умножение натуральных чисел. Произведением двух натуральных чисел a, b он называет число $a*b=a+b+ab$. «Энной» степенью натурального числа по Пете он называет число $a**n = (((a*a)*a)*a \ldots)*a$ (n раз). Петя утверждает, что для некоторых натуральных a, b выполнено равенство $a**n= b^n$. Найдите все такие n, для которых утверждение Пети верно. (Штерн А.С.)

Ответ: $n=1$.
Решение: Заметим, что $a*b=(a+1)(b+1)-1$, таким образом $a**2=(a+1)^2-1$, $a**3=(a**2)*a=(a**2+1)(a+1)-1=((a+1)^2)(a+1)-1=(a+1)^-1$. Докажем, по индукции, что $a**n=(a+1)^n-1$. База при $n=2$ и 3 доказана. Рассмотрим $a**(n+1)=(a**n)*a=(a**n+1)(a+1)-1$, но, по предположению индукции, $a**n=(a+1)^n-1$, поэтому $a**(n+1)=(a+1)^n(a+1)-1=(a+1)^{(n+1)}-1$.
Таким образом Петя утверждает, что $(a+1)^n-1=b^n$. Очевидно, что для $n=1$ утверждение Пети верно. Если же $n>1$, то $(a+1)^n-b^n=1$ влечет $(a+1)^n-b^n=(a+1-b)((a+1)^{(n-1)}+...+b^{(n-1)})=1$, что невозможно для натуральных a и b (так как $a^{(n-1)}>=1$ и $b^{(n-1)}>=1$).
Критерии: Показано, что $a**n=(a+1)^n-1$ - 4 балла; показано, что для $n=1$ утверждение верно - 1 балл; без обоснования утверждается, что разность n-х степеней не может быть равна 1 - снять 1 балл; верное решение - 7 баллов. Все критерии аддитивны.

6. Дана доска $n*n$ ($n>100$) шахматной раскраски. За ход разрешается выбрать клетку и перекрасить все клетки на

диагоналях с выбранной клеткой (выбранная клетка тоже перекрашивается): черный становится белым, белый становится чёрным. Всегда ли можно за несколько ходов сделать доску белой? (Усов С.В.)

<u>Решение</u>: Всегда.
Во-первых, красим большую чёрную диагональ с помощью угловой клетки. Если таких диагоналей две (на доске с нечётной стороной), то красим их с помощью центральной клетки. Далее про покрашенные клетки забываем.

На каждой стороне квадрата выбираем по чёрной клетке следующим образом: на верхней и левой сторонах это клетка под номером x от левого верхнего угла, на оставшихся сторонах - центральносимметричные выбранным. Все чёрные клетки на сторонах разобьются на четвёрки по указанному принципу (кроме лежащих на больших диагоналях, но мы их уже покрасили). Теперь делаем ход в каждую из клеток четвёрки, в результате чего перекрасятся только они (клетки на их диагоналях перекрасятся дважды, а значит не поменяют цвета).

Итак, все чёрные клетки на сторонах квадрата стали белыми, а прочие клетки не изменили цвет. Значит, можно сузить квадрат, отступив на 1 клетку внутрь от каждой стороны и повторить процедуру.

В конце получим квадрат 2x2 либо 1x1, в котором все клетки лежат на больших диагоналях исходного квадрата, а значит белые.

Критерии:
Предложен верный алгоритм без обоснования - 2 балла.
Обоснование оценивается из 5 баллов.
Предложен верный алгоритм с обоснованием чётных квадратов, при обосновании для нечетных квадратов рассмотрена лишь одна из двух возможных раскрасок - 4 балла.
Предложен верный алгоритм с обоснованием только для квадратов одной чётности - 3 балла.

Предложен верный алгоритм, но забыты диагонали - 3 балла.

10-11 класс

1. Решите уравнение $x^2+4xy+5y^2-6y+9=0$. (Мещеряков Е.А.)

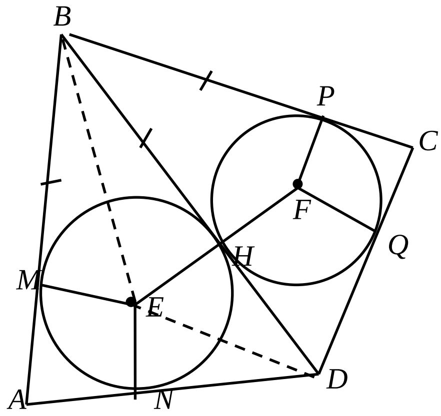
Ответ: $x=-6$ и $y=3$
Решение: заметим, что $x^2+4xy+5y^2-6y+9=(x+2y)^2+(y-3)^2=0$, откуда $y-3=0$ и $x+2y=0$, то есть $y=3$ и $x=-6$.
Критерии: верный ответ - 0 баллов; выражение преобразовано в сумму квадратов, дальнейших продвижений нет - 3 балла; верное решение - 7 баллов (за отсутствие поясней, что из $(x+2y)^2+(y-3)^2=0$ следует $y-3=0$ и $x+2y=0$ баллы не снимать).

2. В ряд сцеплены 3 шестерёнки, у которых всего 999 зубьев (одинаковой формы и размера). Если первую шестерёнку повернуть на 4 оборота, то вторая сделает 5 полных оборотов, а третья - 6 полных оборотов. Сколько зубьев у каждой шестерёнки? (Усов С.В.)

Решение: (копия из 8 класса с поправкой на 999, а не на 111).
<u>Ответ</u>: 405-324-270.
<u>Решение</u>: На второй меньше зубьев, чем на первой, и отношение количества зубьев 5:4. Отношение первой к третьей 6:4. Приводим все к “общему знаменателю”. 30:24:20 = 15:12:10. (суммарное количество частей 37, что в 27 раз меньше, чем 999). На первой 405 зубьев, на второй 324, на третьей 270.
<u>Альтернативное решение</u>: На первой шестеренке x зубьев, на второй y, на третьей z. Когда первая шестеренка делает 4 оборота – проходит $4x$ зубьев, что равно по условию $5y$ и $6z$. Получаем уравнения: $4x=5y=6z$, $x+y+z=999$. Решаем (например, выражаем y и z через x, подставляем во второе), получаем 405-324-270.
<u>Критерии</u>: Правильное решение 7 баллов. Правильный ответ без дальнейших пояснений – 1 балл.
Критерии к первому решению. За каждое из отношений 5:4 и 6:4 по 1 баллу (суммируются). Найдено правильно соотношение 15:12:10 – 5 баллов.

Критерии к альтернативному решению: составлено первое (двойное) уравнение – 2 балла. (система – тоже два балла, потому что второе уравнение ни о чем)

3. Дан четырехугольник ABCD, точка E - точка пересечения биссектрис углов ABD и ADB; F - точка пересечения биссектрис углов CBD и CDB. Оказалось, что прямая EF перпендикулярна прямой BD. Докажите, что в четырехугольник ABCD можно вписать окружность. (Мещеряков Е.А.)



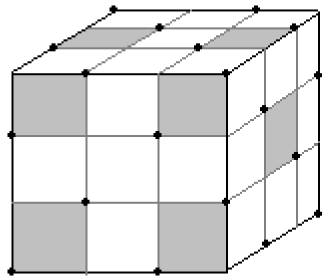
Решение: Заметим, что E и F - центры, вписанных в треугольники ABD и CBD, окружностей ω_1 и ω_2. Так как EF перпендикулярна BD, то окружности вписанные в ABD и CBD касаются BD в общей точке - H. Пусть ω_1 касается AB и AD в точках M и N, а ω_2 касается CB и CD в точках P и Q. Тогда BM=BH=BP и DN=DH=DQ, кроме того AM=AN и CP=CQ. Тогда AB+CD=AM+BM+CQ+DQ=AN+BP+CP+DN=AD+CB. Откуда и следует утверждение задачи.

Решение: Заметим, что E и F - центры, вписанных в треугольники ABD и CBD, окружностей ω_1 и ω_2. Так как EF перпендикулярна BD, то точка пересечения EF и BD – точка касания ω_1 и BD (а также ω_2 и BD), таким образом окружности вписанные в ABD и CBD касаются BD в общей точке - H. Пусть ω_1 касается AB и AD в точках M и N, а ω_2 касается CB и CD в точках P и Q. Тогда BM=BH=BP и DN=DH=DQ, кроме того AM=AN и CP=CQ. Тогда AB+CD=AM+BM+CQ+DQ=AN+BP+CP+DN=AD+CB. Откуда и следует утверждение задачи.

Критерии: Доказано, что ω_1 и ω_2 касаются BD в одной точке - 3 балла; верное решение - 7 баллов.

4. На поверхности кубика Рубика 3×3×3 отмечены несколько точек так, что в каждом из 54 квадратиков, включая его границу, отмечены ровно две точки. Какое наименьшее число точек может быть отмечено? (Шаповалов А.В.)

Ответ. 28 точек.



Пример. Отметим вершины «в шахматном порядке»: у каждой стороны квадратика один конец отмечен, а другой – нет (см. рисунок). Тогда будет отмечена ровно половина всех точек, то есть 28. Оценка. Раскрасим некоторые квадратики: по 4 угловых на передней и задней грани, и через один в параллельном этим граням среднем слое (см. рисунок). Всего раскрашено 14 квадратиков, общих точек у них нет, и в каждом по 2 отмеченные точки, итого не менее 28 точек.

Критерии: верная оценка - 3 балла; верный пример - 3 балла; верное решение - 7 баллов.

5. Компьютерная программа по паре положительных чисел x, y возвращает число $x \uparrow y$. Известно, что для любых трёх положительных чисел верно равенство $x \uparrow (y \uparrow z) = x^{y^z}$. Можно ли гарантировать, что для любых положительных чисел x и y верно равенство $x \uparrow y = x^y$? (Штерн А.С.)

Ответ: Да, можно.
Решение: При z=1 получаем $x \uparrow (y \uparrow 1) = x^y$ и осталось доказать тождество $y \uparrow 1 = y$. Но при y=1 получаем $x \uparrow (1 \uparrow z) = x$ и можно взять $z = 1 \uparrow 1$ и тогда $x = x \uparrow (1 \uparrow (1 \uparrow 1)) = x \uparrow 1$, в силу произвольности x, получаем, что $y \uparrow 1 = y$.
Критерии: Задача сведена к доказательству равенства $x \uparrow 1 = x$ - 2 балла; показано, что $x \uparrow 1 = x$ - 3 балла; верное решение - 7 баллов.

6. Двое играют в следующую игру. Каждым ходом в одну из клеток полоски 1*2024 ставят 1 или 2, выигрывает тот, после чьего хода появится число 121. Кто выиграет при правильно игре? (Мещеряков Е.А.)

Решение: Назовем 1--1 ловушкой (задействованы 4 места), очевидно, что если кто-то сходит в ловушку, то он проиграет. Стратегия за второго: ставим 1 далеко от первого хода Пети, следующим своим ходом ставим 1, таким образом, чтобы создать ловушку. Если Петя сходит в ловушку, то мы закроем эту ловушку и выиграем.

В дальнейшем находим место рядом с какой-нибудь цифрой, которая не включена в ловушку и ставим туда туже цифру, что стоит рядом (если их две разные, то ставим 2). Таким образом после нашего хода получаются ситуации: 1__->11_ или 2__->22_ или 1_2_->122_, 2_1_->221_, очевидно, то Петя не может тут получить 121.

Поэтому, если после нашего хода первый сможет выиграть значит мы сходили в ловушку, а это не так. Почему второй не проиграет, предположим, что для него нет хода подходящего под условия (то есть любой ход в ловушку), но тогда осталось четное число незаполненных клеток, а значит прошло четное число ходов, то есть Петя сходит в ловушку и мы выиграем. А так как есть ловушка, то Петя в нее когда-либо сходит и мы выиграем.

Критерии: есть идея создания ловушки - 2 балла; есть все верные рассуждения, кроме обоснования почему когда остались только ловушки, то ход Пети - 5 баллов; верная и обоснованная стратегия - 7 баллов.