**Математический марафон старшеклассников** (11.10.2020)

**ЭТАП: УРАВНЕНИЯ**

1. (1 балл) Какой из ответов является корнем уравнения  на промежутке 

А 0 B C  D  E  F 

Решение. Ответы А, В и С не входят в заданный интервал. Подстановкой в уравнение остальных ответов убеждаемся, что подходит только ответ под буквой F.

1. (1 балл) Оценивается лишь одна из двух задач. Задание а) необходимо выполнять тем, кто по программе изучал логарифмы, задание b) тем, кто изучал производную. Баллы выставляются только за одно из заданий: или только за а) или только за b):
	1. Указать произведение корней уравнения  или корень, если он единственный

А 1 B -1 C 0 D 2 E -2 F 4

Решение.  ОДЗ уравнения входит в область решения.

Ответ -1

* 1. Для нахождения точек экстремума функции нашли все критические точки. Сколько их?

А 0 B 1 C 2 D 3 E 4 F 5

Решение. ОДЗ . Рассмотрим подкоренное выражение как функцию от *x*, чем больше значение под корнем, тем больше значение исходной функции и наоборот. . Критические точки (точки, в которых на области определения производная равна нулю или не существует) для функции *h(x)* : , ОДЗ исходной функции принадлежит только .

Ответ 1

1. (2 балла) Решить уравнение 

Решение 

Ответ 16

1. (2 балла) Решить уравнение . В ответе напишите произведение корней уравнения или корень в случае единственности решения.

Решение Ответ 2

1. (4 балла) При каких значениях параметра *a* уравнение  имеет ровно три различных решения?

Решение. Введем замену , квадратное  уравнение должно иметь два различных корня, один из которых 1, а второй больше 1 (тогда при обратной подстановке получим )

Учитывая дискриминант  и значение , применим теорему Виета:  При *a*=-2 все условия выполняются.

Ответ -2

**Критерии оценки.**

|  |  |
| --- | --- |
| 4 балла | Проанализирована возможность получения 3 корней. Сформулированы ограничивающие условия на дискриминант. Сформулированы ограничивающие условия на корни уравнения. Верно применена теорема Виета. Получен верный ответ. |
| 3 балла | Проанализирована возможность получения 3 корней. Сформулированы ограничивающие условия на дискриминант. Сформулированы ограничивающие условия на корни уравнения. Верно применена теорема Виета. Есть вычислительная ошибка |
| 2 балла | Проанализирована возможность получения 3 корней. Сформулированы ограничивающие условия на корни уравнения. Верно применена теорема Виета. Отсутствует ограничивающие условие на дискриминант или корни уравнения найдены с ошибкой. |
| 1 балл | Проанализирована возможность получения 3 корней. Дальнейших продвижений нет. ИЛИ На основе верно построенного графика сделан правильный вывод, но построение графика не пояснено. ИЛИ На основе верно использованных свойств функции, получен верный ответ, но обоснования свойств отсутствуют. |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев. |

# **ЭТАП: Неравенства**

***Задание 1*** (1 балл) Решите неравенство  и выберите номер правильного ответа.

**A.**$\left(-\infty ;3,5\right)$ **B.**$\left(-\infty ;0\right)∪\left(0;3,5\right)$ **C.**$ \left(0;3,5\right)$ **D.**$\left(3,5;+\infty \right)$ **E.** Нет решений **F.** 

Ответ C

Решение: 



$$x\in \left(0;3,5\right)$$

Ответ: C

***Задание 2*** (1 балл) Сколько целых решений неравенства  содержится в отрезке $\left[-10;10\right].$ Выберите номер правильного ответа.

**A.** 11 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 7 **E.** 21 **F.** 5

Ответ B

Решение: 

В отрезок [-10;10] попадает три целых решения {-6;-5;-4}.

Ответ: 2

***Задание 3*** (2 балла) Решите неравенство . В ответе укажите длину интервала, являющегося решением неравенства$.$

Решение: Введём замену 



Таким образом, 



Длина интервала: 56-7=49.

Ответ:49

***Задание 4*** (2 балла) Оценивается лишь одна из двух задач. Задание а) выполняют те, кто по программе изучал производную; задание б) выполняют те, кто по программе изучал логарифмы. Баллы выставляются только за одно из заданий: или только за пункт а) или только за пункт b).

* 1. Укажите длину интервала, являющегося решением неравенства: , где функция .

Решение: 



Длина интервала 2,5-1=1,5.

Ответ:1,5

* 1. Решите неравенство . И укажите сумму его целых решений.

Решение: Найдём область допустимых значений.





Поскольку основание логарифма на области допустимых значений больше единицы , то знак неравенства не меняется



Учитывая область допустимых значений  Целые решения 2 и 3, 2+3=5.

Ответ:5

***Задание 5 (4 балла)*** Укажите все значения параметра *а,* при каждом из которых решение неравенства  содержит какой-нибудь отрезок длиной 7, но не содержит никакого отрезка длиной 8.

Решение:$ x^{2}-\frac{36a}{x}+12a<\left(12+a\right)∙x-36;$

$$\frac{x^{3}-36a+12ax-\left(12+a\right)∙x^{2}+36x}{x}<0;$$

$$\frac{x^{3}-36a+12ax-12x^{2}-ax^{2}+36x}{x}<0;$$

$$\frac{\left(x^{3}-ax^{2}\right)-\left(12x^{2}-12ax\right)+\left(36x-36a\right)}{x}<0;$$

$$\frac{x^{2}\left(x-a\right)-12x\left(x-a\right)+36\left(x-a\right)}{x}<0;$$

$$\frac{\left(x-a\right)\left(x^{2}-12ax+36\right)}{x}<0;$$

$$\frac{\left(x-a\right)\left(x-6\right)^{2}}{x}<0;⇔\left\{\begin{array}{c}\frac{\left(x-a\right)}{x}<0;\\x\ne 6.\end{array}\right.$$

Возможны три случая расположения корней числителя и знаменателя и числа 6 на числовой прямой.

а)



Решение $x\in \left(a;0\right)$ при $a<0$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 7, но не содержит никакого отрезка длиной 8, если одновременно выполняются условия.

$$\left\{\begin{array}{c}0-a>7;\\0-a\leq 8.\end{array}\left\{\begin{array}{c}a<-7;\\a\geq -8. \end{array}⇒a\in \left[-8;-7)\right.\right.\right.$$

б)



Решение $x\in \left(0;a\right)$ при $0<a\leq 6$ не может содержать отрезок длиной 7.

в)



Решение $x\in \left(0;6\right)∪\left(6;a\right)$ при $a>6$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 7, но не содержит никакого отрезка длиной 8, если одновременно выполняются условия.

$$\left\{\begin{array}{c}a-6>7;\\a-6\leq 8.\end{array}\left\{\begin{array}{c}a<13;\\a\geq 14. \end{array}⇒a\in (13;\left.14\right].\right.\right.$$

Осталось проверить случай *а*=0.

$\left\{\begin{array}{c}\frac{\left(x-0\right)}{x}<0;\\x\ne 6.\end{array}\left\{\begin{array}{c}\frac{x}{x}<0;\\x\ne 6.\end{array}\right.\right.$ Система решений не имеет.

Ответ: $a\in \left[-8;-7)∪\left.(13;14\right]\right.$

# Критерии проверки *задание 5* этап «*Неравенства»*

|  |  |
| --- | --- |
| 4 балл | Приведена верная последовательность шагов решения: 1) верно выполнены преобразования и задача сведена к решению дробно-рационального неравенства, 2) полученное неравенство верно решено и рассмотрены все возможные случаи расположения параметра *а* на числовой прямой, 3) верно учтены условия содержания (не содержания) отрезков; 4) рассмотрен случай *а*=0. |
| 3 балла | Решение в целом правильно, но допущена арифметическая ошибка. Или не рассмотрен один из случаев расположения параметра *а* на числовой прямой, или *а*=0. |
| 2 баллов | Решение в целом правильно, но допущена арифметическая ошибка. И рассмотрен один из случаев расположения параметра *а* на числовой прямой и *а*=0. |
| 1 баллов | Верно выполнены преобразования и задача сведена к решению дробно-рационального неравенства, полученное неравенство верно решено. И рассмотрен один из случаев расположения параметра *а* на числовой прямой или *а*=0. |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев. |

# **ЭТАП: Текстовые задачи**

1. **(1 балл**). В обменном пункте 100 йен стоят 71 рубль. Туристы обменяли рубли на йены и купили на обед 4 порции суши по цене 31 йена за порцию и 2 чашки чая по 11 йен за чашку. Сколько денег в рублях они отдали за обед?

**Решение**: 4 порции суши 31 х 4 =124 йены.

2 чашки чая 11 х 2=22 йены.

Общая стоимость покупки 124 + 22 = 146 йен.

Перевод в рубли 146 х 71/100= 103,66 рубля.

А 146 B 10366 C 104 D 103,66 E 124 F305,35.

1. **(1 балл).** В магазине цена на товар два раза повышалась на одно и то же количество процентов. В результате товар, стоивший первоначально 1000 рублей, стал стоить 1254 р. 40 коп. Определите, на сколько процентов повышали цену каждый раз.

##### Решение: Пусть в первый раз цена на товар повысилась на р%. Тогда, после первого повышения цена стала равной 1000 (1 + р/100).

После второго повышения на р% цена стала 1000(1 + р/100)(1 + р/100) = 1000(1 + р/100)2.

При этом она стала равна 1254,4.

Составим уравнение:

1000(1 + р/100)2 = 1254,4

(1 + р/100)2 = 1,2544

1 + р/100 = 1,12

р/100 = 1,12 – 1 = 0,12

р = 12%

Ответ: на **12%**.

А 13 B 16 C 12,44 D 12 E 1,2 F11,4.

1. **(2 балла).** В какой-то момент сушки яблок, процентное содержание воды в них было 50%. Получившиеся сухофрукты содержат 20% воды. Определите, во сколько раз за этот период уменьшается вес плодов.

**Решение**:

Пусть первоначальный объём составлял V0 литров, а конечный объём V1 литров. Так как объём сухого вещества не менялся, то 0,5V0=0,8V1, откуда находим V0/V1=1,6, следовательно, объём уменьшился в 1,6 раз.

Ответ: **В 1,6 раз**.

1. **(2 балла)** Два кота вместе могут избавить от мышей все дачи за 9 дней. За сколько дней может избавить от мышей все дачи один кот, если он за 5 дней ловит мышей столько же, сколько второй — за 3 дня?

**Решение**:

Примем работу (избавить от мышей все дачи) за 1. Так как два кота выполняют работу за 9 дней, то их совместная производительность .

Пусть х – дни, необходимые первому коту на выполнение всей работы.

Тогда производительность первого кота 1/x

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | А | V | t |
| I | 1 | 1/x | x |
| II | 5/x | 5/(3x) | 3 |
| I+II | 1 | 1/9 | 9 |

За 5 дней первый кот выполнит  часть работы.

Поскольку и второй за 3 дня выполнит такую же часть работы, то производительность второго кота 

Итак, скорость работы первого кота 1/x, второго , совместная скорость работы 1/9.

Тогда   x=24

Ответ:  **24**

1. **(4 балла).** Такси в черте города за полчаса преодолевает на 13500 метров больше, чем маршрутка, и на путь в 240 км тратит времени на 2 часа меньше. Найдите скорость маршрутки. Ответ дайте в км/ч.

**Решение**:

Переведем 13500 в км/ч.

13500 м=13,5км за ½ часа, т.е. 27 км/ч.

Обозначаем за х км/ч скорость маршрутки. Тогда скорость такси х+27 км/ч.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S (км) | V (км/ч) | T (час) |
| маршрутка | 240 | х |  |
| такси | 240 | х+27 |  |

, , 

Ответ**: 45**

**Критерии проверки:**

|  |  |
| --- | --- |
| *Баллы* | *Правильность (ошибочность) решения* |
| 4 | Полное верное решение |
| 3,5 | Решение верное, но не выполнен перевод минут в часы (ответ приведен в метрах в минуту) или отсутствуют ограничения на переменную (переменные). |
| 3 | Решение верное, но правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка) |
| 2,5 | Решение верное, но корни квадратного уравнения не найдены или получены неверно |
| 1,5 | Правильно получено квадратное уравнение |
| 1 | Правильно составлено уравнение  |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует. |

**ЭТАП: ГЕОМЕТРИЯ**

**Решения и ответы.**

1. (1 балл) В кубе  проведено сечение через точки , площадь этого сечения равна 12м2. Найдите площадь сечения MNK, где M, N, K – середины сторон куба.

А 3м2 B 6м2 C 4м2 D 1,5м2 E м2 F м2

Решение.

Получившиеся два треугольника подобны с коэффициентом 2, их площади относятся как квадрат коэффициента подобия, т.е. 4. .

Ответ А

1. (1 балл) Из предложенных утверждений верно только одно. Укажите его.
	1. Если в четырехугольнике есть две пары равных сторон, то он параллелограмм.
	2. Существует треугольник с периметром 10, одна из сторон которого равна 5.
	3. Сумма внутренних углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°.
	4. Если два угла смежные, то биссектрисы этих углов перпендикулярны.
	5. Длина окружности равна 31 см, радиус этой окружности больше 5 см.
	6. Площадь четырехугольника можно вычислить по формуле , где *р* – полупериметр, а *a, b, c, d* – стороны четырехугольника.

Решение.

1. *Если в четырехугольнике есть две пары равных сторон, то он параллелограмм* – неверно, это может быть, например, равнобедренная трапеция.
2. *Существует треугольник с периметром 10, одна из сторон которого равна 5* – не верно, сумма двух сторон треугольника должна быть больше третьей, это условие не выполняется.
3. *Сумма внутренних углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180*°. – неверно, сумма внутренних углов четырехугольника всегда 360°
4. *Если два угла смежные, то биссектрисы этих углов перпендикулярны –* верно, смежные углы образуют угол в *180*°, биссектрисы разделят углы пополам, значит, между ними будет угол в 90°.
5. *Длина окружности равна 31 см, радиус этой окружности больше 5 см.* – неверно, 
6. *Площадь четырехугольника можно вычислить по формуле , где р – полупериметр, а a, b, c, d – стороны четырехугольника* – неверно, не совпадает размерность формулы для площади.

Ответ D

1. (2 балла) В треугольнике АВС АО и ВО – биссектрисы. Найти величину угла 

Решение

СО – биссектриса, , следовательно . Из  находим величину 

Ответ 126°

1. (2 балла) Найти площадь трапеции

Решение



Проведем отрезок параллельный стороне трапеции, получим параллелограмм и треугольник, высота которого совпадает с высотой трапеции.

Высоту треугольника найдем через площадь: **

С другой стороны *,* откуда *.*

Тогда площадь трапеции равна 

Ответ 100

1. (4 балла) В декартовой системе координат треугольник образован координатами своих вершин (7;0;0), (0;2;0) и (0;0;4).
	1. Докажите, что такой треугольник существует
	2. Найдите площадь этого треугольника.

Решение.

1. 1 способ. Все вершины треугольника лежат на координатных осях, значит, они не лежат на одной прямой, следовательно, образуют треугольник.

2 способ. По теореме Пифагора найдем все стороны треугольника: , , . Неравенство треугольника, очевидно, выполняется:  (, а ).

1. Найдем площадь треугольника по формуле 

Теорема косинусов: , откуда 

По ОТТ: , 

Ответ 

**Критерии оценки.**

|  |  |
| --- | --- |
| 4 балла | Приведено верное обоснование пункта а). В пункте б) получен верный и обоснованный ответ. |
| 3 балла | Приведено верное обоснование пункта а) и в пункте б) найдены длины сторон треугольника АВС |
| 2 балла | Приведено верное обоснование пункта а) и в пункте б) кроме правильно найденных длин сторон треугольника АВС есть существенные продвижения. |
| 1 балл | Приведено верное обоснование пункта а) остальных продвижений нет ИЛИ пункт а) не обоснован, в пункте б) найдены длины сторон треугольника АВС |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев. |

**ЭТАП: Квадратный трехчлен и теорема Виета**

***Задание 1*** (1 балл) Решите уравнение: . Найдите разность между большим и меньшим корнями и выберите номер, соответствующий вашему результату.

**1. ** **2.**$ $ **3. **$ $ **4. ** **5. ** **6.** 

Решение: 

Ответ: 5

***Задание 2*** (1 балл) Точка с координатами (-2;3) является вершиной параболы . Найдите коэффициенты *a* и *b*, в ответе укажите число, равное $a+b.$

**1.** -6 **2.** -10 **3.** 6 **4.** 10 **5.** -5 **6.** 5

Решение:



Ответ: 2

***Задание 3*** (2 балла) Найдите значение параметра *а*, при котором сумма квадратов корней уравнения  будет наименьшей. Если таких значений параметра *а* несколько, то в ответе укажите их сумму.

Решение: Корни существуют если дискриминант неотрицательный.

 для любых значений параметра *а*.

По теореме Виета:

******Квадратичная функция принимает наименьшее значение в вершине (25>0, ветви параболы направлены вверх).



Ответ:-0,12

***Задание 4*** (2 балла) При каких значениях параметра *а,* уравнение  имеет один действительный корень. Если таких значений параметра *а* несколько, то в ответе укажите их сумму.

Решение: 1) Уравнение может иметь один корень, если вырождается в линейное при . Подставим это значение *а* в уравнение  Решение единственное. Значение *а1*=2 соответствует условию задачи.

2) Если уравнение является квадратным, то имеет один корень, если его дискриминант равен нулю.

******

Так как 

Таким образом, 

Ответ:-1

***Задание 5*** (4 балла) Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение  имеет ровно два различных решения.

Решение: 

1) Уравнение  имеет два различных корня, если его дискриминант больше нуля.



Но корни числителя не должны быть корнями знаменателя. Найдём корни знаменателя и проверим это.

2) 

Подставим полученные значения в числитель:

 

3) 

Ответ:$a\in \left(-4;-3\right)∪\left(-3;0\right)∪\left(0;5\right)∪\left(5;+\infty \right)$

Критерии оценки *задание 5*этап *«Квадратный трехчлен и теорема Виета»*

|  |  |
| --- | --- |
| 4 балла | Приведена вся последовательность решения. Указаны требования: числитель равен нулю; знаменатель не равен нулю. Найдено условие, что числитель имеет два различных корня и эти корни не совпадают с корнями знаменателя. Обоснованно получен правильный ответ. |
| 3 балла | С помощью верного рассуждения получено множество значений параметра, отличающееся от исходного только включением точки −4. |
| 2 балла | Указаны требования: числитель равен нулю; знаменатель не равен нулю. Найдено условие, что числитель имеет два различных корня и эти корни не совпадают с корнями знаменателя. Верно рассмотрен хотя бы один из случаев и получено множество значений параметра, отличающееся от искомого только включением точек −3; 0; 5 и/или −4.ИЛИПолучен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом выполнены все шаги решения. |
| 1 балла | Указаны требования: числитель равен нулю; знаменатель не равен нулю. Но решение не завершено. |
| 0 балл | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |