

## Математический марафон старшеклассников

19 декабря 2021 г.

### Текстовые задачи

1. (1 балл). При выпечке имбирных пряников для начинки требуются грецкие орехи, мед и имбирь в отношении 9:3:8. Сколько граммов грецких орехов нужно взять для получения 1 килограмма начинки?

**Решение:**

Пусть грецких орехов  $9x$ , меда  $3x$  и имбиря  $8x$ .

$$9x+3x+8x=20x \quad 1\text{кг}=1000 \text{ г} \quad x=1000:20=50\text{г} \quad 9 \text{ частей по } 50\text{г}= 450\text{г}$$

Ответ: 450.

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
1	Полное верное решение.
0,5	Верная последовательность действий, но имеется арифметическая ошибка ИЛИ Указан только верный ответ без комментариев.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

2. (2 балла). В чашке кофе латте объемом 200 мл содержится 150 мл молока. В кофейне попробовали новый рецепт, при этом количество молока увеличили на 15% (объем чашки кофе остался прежним). Через некоторое время стали использовать молоко с большим % жирности, что позволило сократить количество молока на 20 %. На сколько процентов изменилось количество молока в чашке кофе по сравнению с первоначальным (в ответе укажите, увеличилось или уменьшилось и на сколько процентов).

**Решение:**

Сначала содержание молока в чашке кофе 150 мл

После двух изменений

$$150 \cdot 1,15 \cdot 0,8 = 138$$

$$\frac{150 - 138}{150} \cdot 100\% = 8\%$$

Ответ: количество молока в чашке кофе по сравнению с первоначальным уменьшилось на 8 %.

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение.
1,5	Решение верное, но из-за некоторых неточностей правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка).
1	Найдено количество молока в чашке кофе после двух изменений. Но решение неверное или не завершено, или отсутствует.
0,5	Установлено верно одно или два соотношения между введенными переменными, других продвижений нет.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

3. (2 балла). Дорожные рабочие должны были уложить 1800 м асфальтовой дороги. Но из-за дождливой погоды  $\frac{1}{3}$  часть срока они каждый день не успевали выполнять работу на 20 м. Зато потом в солнечную погоду наверстали отставание, укладывая каждый день на 20 м больше, чем предполагалось, и плановое задание было выполнено на 1 день раньше срока. Сколько метров дорожного полотна планировалось укладывать в день?

**Решение:** Пусть  $x$  - срок по плану,  $y$  – количество метров дорожного полотна по плану.

$$\begin{cases} xy = 1800 \\ \frac{x}{3}(y-20) + (\frac{2x}{3}-1)(y+20) = 1800 \end{cases} \Rightarrow y = 100$$

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение.
1,5	Решение верное, но из-за некоторых неточностей правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка).
1	Получена верная система уравнений. Но решение неверное или не завершено, или отсутствует.
0,5	Установлено верно одно или два соотношения между введенными переменными, других продвижений нет.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

**4. (3 балла).** Брусok состоит из 210 г железа и олова, другой - из 450 г железа и 50 г олова. Отпилили часть первого бруска массой 120 г и часть второго бруска, сплавил и получили 300 г металла, содержащего 75 % железа. Укажите вес первого бруска.

**Решение:** Пусть  $x$  - вес первого бруска.

	Железо (конц)	Сплав (г)	Железо (г)
1 сплав	$\frac{210}{x}$	120	$120 \cdot \frac{210}{x}$
2 сплав	$\frac{450}{500} = 0,9$	180	$180 \cdot 0,9$
1+2	0,75	300	$300 \cdot 0,75$

$$120 \cdot \frac{210}{x} + 180 \cdot 0,9 = 300 \cdot 0,75$$

$$\frac{2 \cdot 70}{x} + 0,9 = 1,25 \Rightarrow 0,35x = 140 \Rightarrow x = 400$$

$$\frac{210}{x} = 3,28 - 2,58 \quad \frac{210}{x} = 0,7 \quad x = 300$$

Ответ: 300.

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение
2,5	Решение верное, но правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка).
2	Правильно составлено уравнение
1	Правильные шаги в составлении уравнения, но уравнение составлено неверно ИЛИ не составлено
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

**5. (4 балла).** Два курьера движутся по дороге навстречу друг другу. Один вышел на 12 минут позже, поэтому при встрече они отметили, что его товарищ прошел на 240 м больше. Далее они продолжили движение и первый курьер прибыл к заказчику через 16 минут, а второй курьер через 18 минут. Найдите скорость первого курьера (ответ укажите в км/ч).

**Решение:**

Пусть  $v_1, v_2$  (м/мин) – скорости первого и второго курьеров,

$t$  минут- время первого курьера до встречи,  $(t+12)$ - время второго курьера до встречи.

$$v_1 t + 240 = v_2 (t + 12)$$

$$\begin{cases} \frac{v_2(t+12)}{v_1} = 16 \\ v_1 t = 18v_2 \\ v_2(t+12) = 16v_1 \end{cases} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{18}{t} \Rightarrow \frac{t(t+12)}{18} = 16$$

$$t^2 + 12t - 16 \cdot 18 = 0 \quad D = 144 + 1152 = 36^2 \quad t = 12.$$

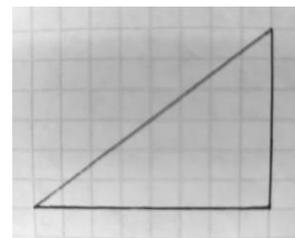
$$v_2 = \frac{12}{18} v_1 = \frac{2}{3} v_1 \Rightarrow v_1 t + 240 = \frac{2}{3} v_1 t + 8v_1 \Rightarrow \frac{1}{3} v_1 t + 240 = 8v_1$$

$$v_1 = 60 \text{ м / мин.} = 3,6 \text{ км / ч}$$

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
4	Полное верное решение
3,5	Решение верное, но не выполнен перевод минут в часы (ответ приведен в метрах в минуту).
3	Решение верное, но правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка)
2,5	Решение верное, но корни квадратного уравнения не найдены или получены неверно
1,5	Правильно получена система уравнений
1	Правильно составлено 2 уравнения
0,5	Правильно составлено 1 уравнение
0	Решение неверное, движения отсутствуют или решение отсутствует.

**Математический марафон старшекласников**  
**19 декабря 2021 г.**  
**Геометрия**



**1. (1 балл).** Найти длину медианы, проведенной к большей стороне.

**Решение:** Большая сторона – гипотенуза. Катеты 8 и 6, гипотенуза 10 (пифагорова тройка). Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Тогда половина гипотенузы = 5.

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
1	Полное верное решение.
0,5	Верные рассуждения, но имеются арифметические ошибки.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

**2. (2 балла).** Высота параллелограмма делит сторону на равные отрезки и равна ее половине. Найти площадь параллелограмма, если известно, что сторона параллелограмма, к которой проведена высота, равна 6.

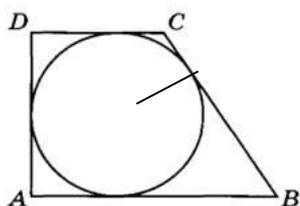
**Решение:** Высота параллелограмма равна 3, т.к. половина стороны 3. Тогда  $S=3 \cdot 6=18$

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение.
1	Найдена площадь параллелограмма, имеются арифметические ошибки.
0,5	Имеются продвижения в решении, но площадь параллелограмма не найдена
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

**3. (2 балла).** Сумма отрезков  $AB+BC+CD+DA=64$ , сторона  $CB$  равна 18. Найти длину отрезка, проведенного из центра окружности.

**Решение:**



Отрезок – радиус вписанной окружности. Радиус окружности будет равен половине стороны  $AD$ , т.к.  $AD$  по длине совпадает с диаметром окружности.

$$AD = 32 - 18 = 14.$$

и радиус окружности:

$$R = AD : 2 = 14 : 2 = 7.$$

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение.
1	Верное решение, но имеются арифметические ошибки.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

4. (3 балла). Аквариум с прямоугольным основанием 50 см на 60 см и высотой 50 см заполнили водой на  $24/25$ . Когда в аквариум опустили кормушку в форме правильного тетраэдра со стороной  $30\sqrt{2}$ , часть воды пролилась на пол. Найти объем пролитой воды. Ответ укажите в  $\text{см}^3$ .

**Решение:**

$$50 \times 60 \times 50 = 150000 \text{ см}^3.$$

$$\text{Объем незаполненной части аквариума } 50 \times 60 \times 2 = 6000 \text{ см}^3.$$

Объем ( $V$ ) тетраэдра равняется одной третьей произведения площади любой

грани и высоты, опущенной на нее 
$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

В правильном тетраэдре все грани являются равносторонними треугольниками. Объем данной фигуры равен одной двенадцатой произведения длины его ребра в кубе на квадратный корень из числа 2.

$$V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}, \quad V = \frac{1}{12} (30\sqrt{2})^3 \sqrt{2} = 9000$$

т.е.  $V$  кормушки = 9000.

Тогда вылилось объем кормушки - объем незаполненной части аквариума  
 $9000 - 6000 = 3000$

**Критерии проверки:**

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение. Обоснованно получен верный ответ
2,5	Идеи нахождения объема, в целом верны, но имеются арифметические ошибки и (или) мелкие неточности
2	Найден объем кормушки и объемы заполненной и незаполненной частей аквариума
1,5	Найден объем кормушки и объем незаполненной части аквариума
1	Найден объем незаполненной части аквариума ИЛИ объем кормушки
0,5	Найден объем аквариума. Но продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

5. (4 балла). Макет елки, выполненной в форме конуса, обернули зеленой бумагой. Потом отрезали верхнюю часть конуса на расстоянии  $1/4$  высоты, считая от вершины конуса. Найти площадь освободившегося листа в  $\text{см}^2$ , если осевое сечение - равносторонний треугольник со стороной 1 м.

**Решение:**

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле:

$$S = \pi r l, \text{ где } r \text{ — радиус основания конуса, а } l \text{ — образующая конуса.}$$

Осевое сечение - равносторонний треугольник со стороной 1 м

$$\text{тогда } r = 1/2, \quad l = 1 \quad S = \pi/2.$$

Верхняя часть конуса — конус, в сечении которого равносторонний треугольник со стороной  $1/4$  м (треугольники подобны с коэффициентом подобия 1:4).

Тогда образующая конуса =  $1/4$ , радиус окружности основания  $1/8$  м.

Площадь боковой поверхности конуса

$$S = \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{32}$$

**Критерии проверки:**

<i>Баллы</i>	<i>Правильность (ошибочность) решения</i>
3	Полное верное решение. Обоснованно получен верный ответ
2	Идеи нахождения площади, в целом верны, но имеются арифметические ошибки и (или) мелкие неточности.
1,5	Найдены радиус верхнего конуса и образующая
1	Найдена площадь боковой поверхности большого конуса
0,5	Сделан верный чертеж. Но идей для вычислений нет.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

