**Математический марафон старшеклассников**

**18 декабря 2022 г.**

**Уравнения и неравенства**

**Задание 1** (1 балл) Решить неравенства: $ \frac{1}{х-2}>1$

*Решение:* $\frac{1}{х-2}-1>0; \frac{1-х+2}{х-2}>0; \frac{3-х}{х-2}>0;2<х<3$

Ответ: $2<х<3$.

*КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ*

|  |  |
| --- | --- |
| 1 балл | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 0,5 баллов | Решение не доведено до конца или допущена арифметическая ошибка. |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев. |

**Задание 2** (1 балл) Решить уравнение: $\left|\left(x-6\right)^{3}+28\right|=36.$

*Решение:* $\left(x-6\right)^{3}+28=36 или \left(x-6\right)^{3}+28=-36$

$$ \left(x-6\right)^{3}=8 или \left(x-6\right)^{3}=-64 $$

$$\left(x-6\right)^{3}=2^{3} или \left(x-6\right)^{3}=\left(-4\right)^{3} $$

$$x-6=2 или x-6=-4$$

$$x=8 или x=2 $$

Ответ: $x=8 или x=2 $.

*КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ*

|  |  |
| --- | --- |
| 1 балл | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 0,5 баллов | Решение не доведено до конца или допущена арифметическая ошибка. |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев. |

**Задание 3** (2 балла) Решить уравнение: $\sqrt{x+11}=x-1.$

*Решение:* $\left\{\begin{array}{c}x-1\geq 0\\x+11=\left(x-1\right)^{2 }\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\x^{2}-3x-10=0\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x\geq 1\\x=-2;x=5\end{array}\right.$

Ответ: $x=5$.

*КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ*

|  |  |
| --- | --- |
| 2 балл | Обе части уравнения верно возведены в квадрат, верно решено полученное квадратное уравнение, верно произведен отбор корней (с помощью условия на правую часть или с помощью проверки). |
| 1 баллов | Допущена описка или арифметическая ошибка. |
| 0,5 балла | Обе части уравнения верно возведены в квадрат, решено полученное квадратное уравнение, но перепутаны знаки корней уравнения. Отбор корней не произведен. |
| 0 баллов | Уравнение решено, но не произведен отбор корней. |

**Задание 4** (2 балла) Укажите наибольшее целое решение неравенства: $\frac{4}{\sqrt{2-х}}-\sqrt{2-х}<2$

*Решение:* ОДЗ: $х<2$. Обозначим $\sqrt{2-х}=t, t>0 на ОДЗ.$

$\frac{4}{t}-t<2; \frac{t^{2}+2t-4}{t}>0$. Так как $t>0$, следовательно $t^{2}+2t-4>0$, $t<-1-\sqrt{5}, t>-1+\sqrt{5}$, учитывая условие $t>0$, $t>-1+\sqrt{5}.$ Возвращаемся к замене: $\sqrt{2-х}>\sqrt{5}-1$, $2-х>6-2\sqrt{5}, х<2\sqrt{5}-4.$ Что соответствует ОДЗ. Наибольшим целым является 0.

Ответ: 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 2 балл | Выполнена замена, верно решено дробно-рациональное неравенство относительно новой переменной, верно сделана обратная замена. Обоснованно получен правильный ответ. |
| 1 баллов | Допущена описка или арифметическая ошибка. |
| 0,5 балла | Выполнена замена, полученное дробно-рациональное неравенство решено с ошибкой, сделана обратная замена. Ответ отличается от верного. |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев. |

**Задание 5** (3 балла) При каких значениях параметра *а* уравнение $\left(3x-a\right)\sqrt{2x-6}=0$ имеет ровно один корень?

*Решение:* $ОДЗ:x\geq 3.$

$$3x-a=0 или 2x-6=0$$

$$x=\frac{a}{3} x=3\in ОДЗ$$

Следовательно, $x=\frac{a}{3}$ должен являться посторонним корнем, т. е. $\frac{a}{3}<3, a<9.$

Или корни совпадают $\frac{a}{3}=3, a=9.$

Ответ: $a\leq 9.$

*КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ*

|  |  |
| --- | --- |
| 3 бала | Верно выполнены все этапы решения: а) определена ОДЗ; в) найдены возможные корни; с) с учетом требования условия «единственный корень» верно выписано условие ($\frac{a}{3}<3$); d) рассмотрен случай совпадения корней. |
| 2 балла | В целом решение верное, но допущена описка или негрубая ошибка. |
| 1 балл | Ответ неполный, не рассмотрен случай совпадения корней. |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.  |

**Задание 6** (3 балла) При каких значениях параметра *а* неравенство

 $\frac{x^{2}-8x+20}{ax^{2}+2\left(a+1\right)x+9a+4}<0$ выполняется для всех значений *х*.

*Решение:* $x^{2}-8x+20>0 при x\in R.$Следовательно $ax^{2}+2\left(a+1\right)x+9a+4<0$ должно быть верно для $x\in R.$

При $a=0 получаем 2x+4<0$ не верно для $x\in R.$

При $a\ne 0$ условие выполняется если ветви параболы направлены вниз и дискриминант меньше нуля. $D=4\left(a+1\right)^{2}-4a\left(9a+4\right)=4\left(-8a^{2}-2a+1\right)<0$; $a<-0,5 или a>0,25.$ Но ветви должны быть направлены вниз, следовательно $a<0.$

Ответ: $a<-0,5.$

*КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ*

|  |  |
| --- | --- |
| 4 бала | Обоснованно получен правильный ответ. |
| 3 балла | Получен правильный ответ, но не обоснован случай *а≠0*. |
| 1 балл | Не учтено, что ветви должны быть направлены вниз*.* |
| 0 баллов | Решение не соответствует ни одному из критериев перечисленных выше. |