

Уравнения

1. (1 балл). Решить уравнение $\left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x} = 64$.

Решение: $\left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x} = 64 \quad (2^3)^{2x} = 2^6 \quad 2^{6x} = 2^6 \quad x=1$.

Ответ: $x=1$.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
1	Полное верное решение.
0,5	Верная последовательность действий, но имеется арифметическая ошибка ИЛИ Указан только верный ответ без комментариев.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует..

2. (2 балла). Решить уравнение $\frac{x}{x+2} + \frac{x+1}{x+5} - \frac{7-x}{(x+5)(x+2)} = 0$.

Решение: Запишем ОДЗ: $x \neq -2; x \neq -5$; $\frac{x(x+5) + (x+1)(x+2) - 7 + x}{(x+5)(x+2)} = 0$

$2x^2 + 9x - 5 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -5$. Один из корней не удовлетворяет ОДЗ, поэтому в ответ записываем только второй корень.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение Получен правильный ответ.
1,5	Верно выполнено приведение к одному знаменателю, при решении квадратного уравнения допущена арифметическая ошибка. С учётом этой ошибки получен неверный ответ
1	Верно выполнено приведение к одному знаменателю. Решено квадратное уравнение. Не выполнен отбор корней
0,5	Верно найдена ОДЗ.
0	Ни одно из выше перечисленных действий не выполнено.

3. (2 балла). Решить уравнение $6^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 = 0$. Если корней более 1, в ответе укажите сумму корней.

Решение: $6^x - 8 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 72 = 0 \quad 3^x(2^x - 8) - 9(2^x - 8) = 0 \quad (3^x - 9)(2^x - 8) = 0$
 $3^x = 9$ или $2^x = 8$; $x=2$ или $x=3$. $3+2=5$.

Ответ: 5

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение Получен правильный ответ.
1,5	Верная последовательность действий. Корни найдены верно. Сумма посчитана неправильно.
1	Верно найден 1 корень
0,5	Верно проведена группировка
0	Ни одно из выше перечисленных действий не выполнено.

4. (3 балла). Решить уравнение $|x-3| + 2|x+1| = 4$

Решение: Рассмотрим три случая: $x < -1$; $x \in [-1; 3]$; $x > 3$.

1 случай. Раскрываем модули, перед ними ставим знак -.

$-(x-3) - 2(x+1) = 4 \quad x = -1$. (Не входит в промежуток). Множество решений пусто.

2 случай. $-(x-3)+2(x+1)=4$ $-x+3+2x+2=4$ $x=-1$.

Множество решений $x \in \{-1\}$

3 случай. Раскрываем модули, перед ними ставим знак +.

$x-3+2(x+1)=4$. $x = \frac{5}{3}$. (Не входит в промежуток). Множество решений пусто.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение. Получен правильный ответ
2,5	Решение выполнено на каждом из промежутков. Допущена арифметическая ошибка, из-за которой получен неверный ответ
2	Верно определены промежутки Решение выполнено на двух из 3 промежутков.
1,5	Верно определены промежутки. Решение выполнено на одном из 3 промежутков.
1	Верно найдены корни выражений под модулями. Верно раскрыты модули..
0,5	Найдены корни выражений под модулями. Верно определены промежутки.
0	Неверно раскрыты модули. Рассмотрены не все варианты. Получен неверный ответ.

Ответ: $x \in \{-1\}$

5. (4 балла).

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x} - 10x + 29 = 3 - x$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Решение: а) $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3-x \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \geq x \\ x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 3 \\ x^3 - 5x^2 - 14x + 20 = 0 \end{cases} \quad x^2(x-5) - 4(x-5) = 0 \quad (x-5)(x-2)(x+2) = 0$

$x=-2; x=+2$.

б) $x=-2$ не удовлетворяет условию. Действительно, $-2 < -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 4 > 3$.

Искомый корень $x=+2$, т.к. $2 > 0, 4 < 30$ тогда $\sqrt{4} < \sqrt{30}$ (функция возрастающая).

4	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.
3	Обоснованно получен верный ответ в пункте а, а в пункте б выбор недостаточно обоснован
2,5	Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б.
2	Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б
1	Верно указаны ограничения на переменную x .
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

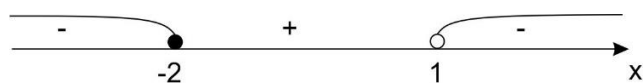
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАРАФОН СТАРШЕКЛАССНИКОВ

22 сентября 2019 г.

Неравенства

1. (1 балл) Решить неравенство $\frac{6}{1-x} \leq 2$.

Решение: $\frac{4+2x}{1-x} \leq 0$



Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup (1; +\infty)$

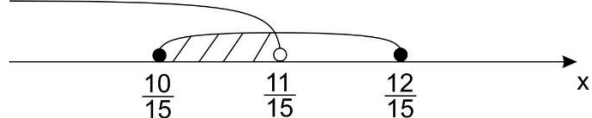
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

1 балл	Обоснованно получен правильный ответ.
0,5 баллов	Допущена арифметическая ошибка или описка.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

2. (2 балл) Решить неравенство $\frac{15x^2-22x+8}{\sqrt{11-15x}} \leq 0$.

Решение: ОДЗ: $x < \frac{11}{15}$; т. к. $\sqrt{11-15x} > 0$ на ОДЗ, то $15x^2 - 22x + 8 \leq 0$.

$\frac{10}{15} \leq x \leq \frac{12}{15}$; уч. ОДЗ $x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{11}{15}\right)$.



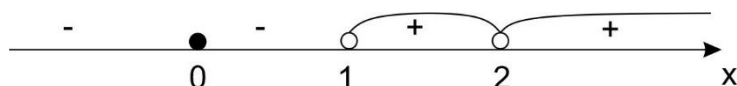
Ответ: $x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{11}{15}\right)$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

2 балла	Обоснованно получен правильный ответ.
1 балл	Ответ отличается от верного исключением значения $x = \frac{2}{3}$. Или допущена арифметическая ошибка или описка.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

3. (2 балл) Решить неравенство $\frac{(x^2-x)^2(x^3-6x^2+12x-8)}{x^2-3x+2} \geq 0$.

Решение: Разложим числитель и знаменатель на множители: $\frac{x^2(x-1)^2(x-2)^3}{(x-1)(x-2)} \geq 0$. Отметим корни числителя и знаменателя на числовой прямой и определим знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов.



Ответ: $x \in \{0\} \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

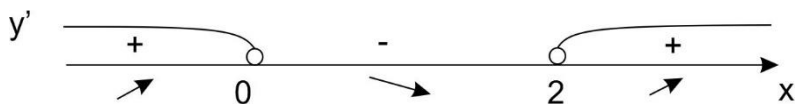
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

2 балл	Обоснованно получен правильный ответ.
1 балла	Ответ отличается от верного исключением значения $x = 0$. Или допущена арифметическая ошибка или описка.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

4. (3 балл) Оценивается лишь одна из двух задач. Задание, а) выполняют тем, кто по программе изучал производную; задание б) выполняют тем, кто по программе изучал логарифмы. Баллы выставляются только за одно из заданий: или только за а), или только за б).

а) Найти интервалы возрастания функции $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$.

Решение: $y' = \frac{(2x-4)x^2 - (x^2-4x+4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 8x}{x^4} = \frac{4x(x-2)}{x^4} = \frac{4(x-2)}{x^3} = 0$ при $x = 2$.



$y' > 0$ при $x < 0$; $x > 2$.

Примечание: 1) Производная может быть найдена и другим способом, на пример

$$\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\right)' = \left(\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2\right)' = 2\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right) = \frac{4(x-2)}{x^4}.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

3 балл	Обоснованно получен правильный ответ.
2 балла	Верно найдена производная, составлено и решено неравенство. Но допущена арифметическая ошибка или описка.
1 баллов	Верно найдена производная. Или производная найдена не верно, с учетом этого верно составлено и решено неравенство, получен не верный ответ.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

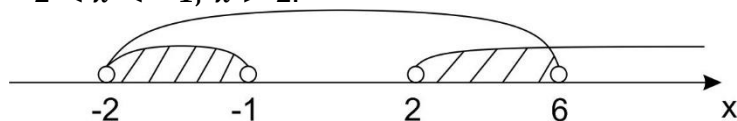
б) Решить неравенство $\log_{x+2}(6-x) < 1$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x > -2; \\ x < 6; \\ \log_{x+2}(6-x) < \log_{x+2}(x+2); \\ x \neq -1. \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 < x+2 < 1; \\ 6-x > x+2. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+2 > 1; \\ 6-x < x+2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < -1; \\ x < 2. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -1; \\ x > 2. \end{cases}$$

$$-2 < x < -1; x > 2.$$



С учетом ОДЗ $-2 < x < -1$; $2 < x < 6$.

Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (2; 6)$.

Примечание: 1) Условия на основания логарифма в системах может быть выписано сразу с учетом ОДЗ.

2) Школьник может решать неравенство методом рационализации.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

3 балл	Обоснованно получен правильный ответ.
2 балла	Верно найдена ОДЗ, рассмотрены оба случая. Но допущена арифметическая ошибка или описка.
1 баллов	Верно найдена только ОДЗ.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

5. (4 балл) Найти все значения параметра a , при которых выражение $\sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3}$ имеет смысл для любых $x \in R$.

Решение: $(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \geq 0$, при $x \in R$.

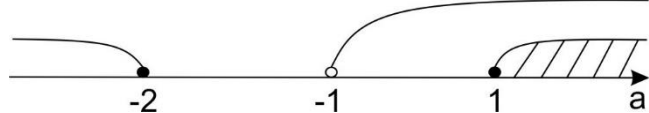
1) $a+1 = 0$; $a = -1 \Rightarrow 4x - 6 \geq 0$; $x \geq 1,5$. Условие задачи не выполняется.

2) $a \neq -1$ Парабола должна лежать выше оси ОХ или её касаться, т. е. ветви направлены вверх и

дискриминант неположительный. $\begin{cases} a+1 > 0; \\ D \leq 0. \end{cases}$

$$D = 4(a-1)^2 - 4(a+1)(3a-3) = 4(a-1)(-2a-4).$$

$$\begin{cases} a+1 > 0; \\ (a-1)(-2a-4) \leq 0. \end{cases} \begin{cases} a > -1; \\ a \leq -2; a \geq 1. \end{cases}$$



$a \geq 1$.

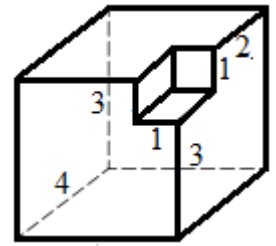
Ответ: $a \in [1; +\infty)$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

4 балл	Приведена верная последовательность шагов решения: 1) верно выписано условие на подкоренное выражение и переформулирован вопрос, 2) верно выписаны условия на дискриминант и старший коэффициент, 3) рассмотрен случай вырождения квадратного трехчлена в линейный двучлен.
3 балла	Решение в целом правильно, но допущена арифметическая ошибка.
2 баллов	Допущена ошибка в одном из трех пунктов, два пункта выполнены верно. Или один пункт не выполнен (не рассмотрен случай вырождения квадратного трехчлена в линейный двучлен).
1 баллов	Один пункт из трех выполнен верно.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

Этап «Геометрия»

1 (1 балл). Найдите объем многогранника с вырезанной частью, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Решение: Объем прямоугольного параллелепипеда: $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$, объем вырезанного прямоугольного параллелепипеда: $1 \cdot 1 \cdot (4 - 2) = 2$.

Итого: $V=36-2=34$

Ответ: 34

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
1	Полное верное решение.
0,5	Верная последовательность действий, но имеется одна арифметическая ошибка ИЛИ Указан только верный ответ без комментариев.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.

2 (2 балла). Определите, верными или неверными являются следующие утверждения (*дайте аргументированный ответ*):

- А) Существует квадрат, который не является ромбом.
- В) В правильной пирамиде все стороны равны.
- С) Могут ли два угла равнобедренного треугольника равняться 20° и 80° ?
- Д) Диагональ – отрезок, соединяющий вершины многоугольника.

Решение:

- А) Существует квадрат, который не является ромбом – **Нет**.
У квадрата все стороны равны, следовательно он всегда является ромбом.
- В) В правильной пирамиде все стороны равны – **Нет**.
В правильной пирамиде в основании лежит правильный многоугольник и вершина проецируется в центр, т.е. боковые грани являются равнобедренными треугольниками.
- С) Могут ли два угла равнобедренного треугольника равняться 20° и 80° ? – **Да**
Например, треугольник с углами 20° , 80° и 80°
- Д) Диагональ – отрезок, соединяющий вершины многоугольника – **Нет**.
Если соединены два соседние вершины, получим сторону, а не диагональ.

Ответ: нет, нет, да, нет

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Правильно определено для каждого из четырех утверждений: верно оно или нет. Каждый ответ аргументирован, т.е. либо приведен пример существования, либо контрпример, либо есть уточнение формулировки и т.п.
1,5	Дан аргументированный ответ для трех утверждений.
1	Дан аргументированный ответ для двух утверждений.
0,5	Дан аргументированный ответ для одного утверждения.
0	Правильность всех утверждений определена неверно или есть только ответ без аргументации.

3 (2 балла). Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского кремля приблизительно равна 3,5м. Найдите длину дуги окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение двадцати пяти минут одного часа ($\pi \approx 3$). Ответ запишите в виде десятичной дроби.

РЕШЕНИЕ

За 25 минут минутная стрелка проходит $\frac{5}{12}$ круга. Длина дуги составляет $\frac{5}{12}$ длины всей окружности: $L = \frac{5}{12} \cdot 2\pi R = \frac{5}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{4} = 8,75$

Примечание. Возможны другие решения, например, вычислена градусная мера в $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ. 8,75.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение. Указана формула (формулы), которая позволила произвести верные вычисления.
1	Решение в целом верное, но отсутствуют обоснования или же в обоснованиях имеются неточности и (или) неверные утверждения.
0,5	Верно найдена градусная мера в 150° , соответствующая 25 минутам.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

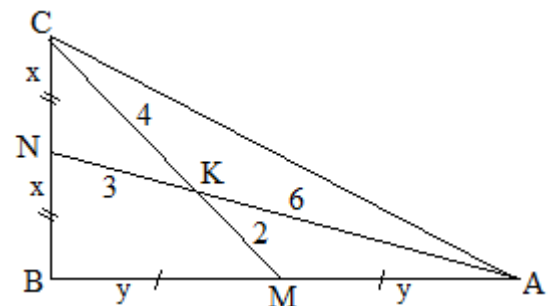
4 (3 балла). Вычислить острый угол между медианами, имеющими длины 6 и 9, проведенными к катетам прямоугольного треугольника.

РЕШЕНИЕ

Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Можно вычислить длины отрезков на которые медианы разбивают друг друга: $NK=3, AK=6; MK=2, CK=4$.

Острый угол между медианами можно вычислить из либо из треугольника $СKN$, либо из треугольника AKM . Приведем пример для треугольника $СKN$.

Введем переменные: $CN=NB=x, AM=MB=y$.



Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников $СВМ$ и $АВN$: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 4y^2 = 81 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 = 36 - 4x^2 \\ x^2 + 4(36 - 4x^2) = 81 \end{cases} \rightarrow x^2 = \frac{21}{5}$$

Треугольник $СKN$: $x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\alpha \rightarrow 24\cos\alpha = 25 - \frac{21}{5} \rightarrow \cos\alpha = \frac{104}{5} \cdot \frac{1}{24} = \frac{13}{15}$.

$$\alpha = \arccos \frac{13}{15}$$

Ответ. $\arccos \frac{13}{15}$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Приведено полное верное решение. Получен правильный ответ.
2,5	Приведено полное верное решение. Получен не верный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ найден не угол α , а $\cos\alpha$.
2	В целом рассуждения верные, приведены верные формулы, но есть неточности в преобразованиях, что привело к неверным выводам.
1	Найдены длины катетов ИЛИ верно составлена система. Дальнейших продвижений нет

0,5	Найдены отрезки медиан. Дальнейших продвижений нет
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

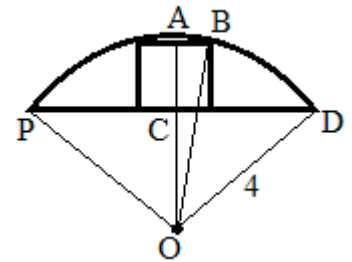
5 (4 балла). В сегмент, дуга которого содержит 120° , вписан квадрат. Найти длину стороны квадрата, если радиус окружности равен 4.

РЕШЕНИЕ

$\angle COD = 60^\circ, OD = R = 4$, следовательно, $CO = OD \cdot \cos 60^\circ = 2$
 $OC \perp CD$, С – середина стороны (), значит А – середина стороны и
треугольник OAB прямоугольный.

Обозначим сторону квадрата $2x$, $AB=x$ (из соображения симметрии).

Треугольник OAB: $OA=2+2x$, $AB=x$, $OB=R=4$



$$16 = (2 + 2x)^2 + x^2$$

$$5x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-4 + \sqrt{76}}{5} \\ x_2 = \frac{-4 - \sqrt{76}}{5} \end{cases} \rightarrow x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{19}}{5}$$

$$2x = \frac{4\sqrt{19} - 8}{5} = \frac{4}{5}(\sqrt{19} - 2)$$

Примечание. Возможны другие решения, например, вычислена градусная мера в $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ. $\frac{4}{5}(\sqrt{19} - 2)$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
4	Полное верное решение. Все обоснования имеются.
4,5	Идеи решения верны, получен правильный ответ, но нет объяснения, почему ABO прямоугольный.
3	Результаты вычислений показаны на чертеже, но обоснования не приведены. В целом решение верное, но необоснованное.
2	Ответ получен (возможно, неверный из-за арифметической ошибки), но в обоснованиях имеются неточности.
1	Найдены некоторые элементы геометрической конструкции (например, длина OC). ИЛИ (И) Отмечено, что ABO прямоугольный. Других продвижений нет.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

Текстовые задачи

1. (1 балл). Девочка купила 3 йогурта стоимостью 35 рублей 90 копеек за штуку и 2 пакета молока по 57 рублей 45 копеек. Сколько сдачи должна принести девочка, если мама дала ей 300 рублей? Ответ укажите в рублях.

Решение: 3 йогурта это $35,9 \times 3 = 107,70$ рублей.

2 пакета молока $57,45 \times 2 = 114,90$ рублей.

Общая стоимость покупки $107,70 + 114,90 = 222,60$.

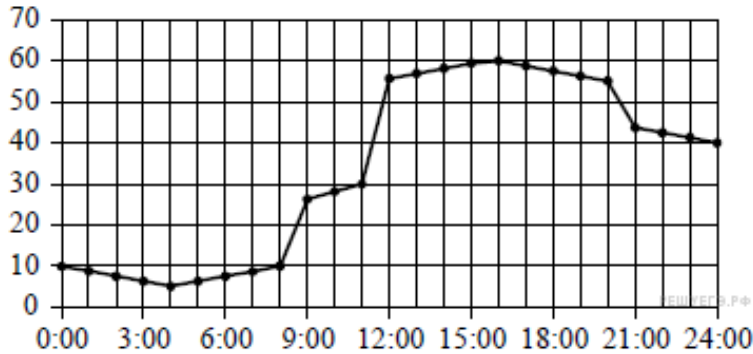
Сдача $300 - 222,60 = 77,4$ рубля.

Ответ: 77,4 рубля.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
1	Полное верное решение.
0,5	Верная последовательность действий, но имеется одна арифметическая ошибка ИЛИ Указан только верный ответ без комментариев.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует..

2. (2 балла). На рисунке точками показано количество посещений сайта музыкального шоу на протяжении суток. По горизонтали указываются часы, по вертикали — количество посещений в сотнях человек. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику количества посещений сайта в течение этого периода.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- | | |
|-----------------------------|---|
| А) ночь (с 0 до 6 часов) | 1) Самый быстрый рост количества посещений сайта за сутки. |
| Б) утро (с 6 до 12 часов) | 2) Количество посещений сайта падало в течение всего периода. |
| В) день (с 12 до 18 часов) | 3) Количество посещений сайта достигло максимума за сутки. |
| Г) вечер (с 18 до 24 часов) | 4) Количество посещений сначала падало, а потом росло. |

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Решение:

Ночью с 0 до 6 часов количество посещений сайта сначала падало, а потом росло.

Утром с 6 до 12 часов самый быстрый рост количества посещений за сутки.

Днём с 12 до 18 часов количество посещений достигло максимума за сутки.

Вечером с 18 до 24 часов количество посещений падало в течение всего периода.

Таким образом, получаем соответствие: А — 4, Б — 1, В — 3 и Г — 2.

Ответ: 4132.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение (каждой букве верно сопоставлена цифра).
1,5	Трем буквам верно сопоставлены цифры.

1	Двум буквам верно сопоставлены цифры.
0,5	Только одной букве верно сопоставлены цифры.
0	Нет ни одной верной комбинации.

3. (2 балла). Две трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 12 часов. Первая труба наполняет бассейн на 10 часов быстрее, чем вторая. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

Решение: В задаче не сказано, чему равен объем бассейна (объем работы). Значит, работу можно принять за единицу.

Пусть первая труба наполняет бассейн за x часов. Тогда за 1 ч она наполнит $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а вторая

труба - $\frac{1}{x+10}$. По условию, обе трубы одновременно наполняют бассейн за 12 часов. Значит,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}. \quad x^2 - 14x - 120 = 0. \quad \text{Корни } -6 \text{ и } 20. \quad \text{Отсюда } x = 20.$$

Ответ: 30 ч.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
2	Полное верное решение.
1,5	Решение верное, но из-за некоторых неточностей правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка).
1	Получено верное уравнение. Но его решение неверное или не завершено, или отсутствует.
0,5	Установлено верно одно или два соотношения между введенными переменными, других продвижений нет.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

4. (3 балла) Заработная плата рабочего за октябрь и ноябрь относилась как $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3}$, а за ноябрь и

декабрь как $2 : 2\frac{2}{3}$. За декабрь рабочий получил на 400р. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана ему начислили премию в размере 40% трехмесячного заработка. Найдите размер премии. (При решении считать, что число рабочих дней в каждом месяце одинаково)

Решение: пусть x р. зарплата за ноябрь, тогда $x * 1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} = \frac{9x}{8}$ р. зарплата за октябрь;

$$\frac{x}{2} * 2\frac{2}{3} = \frac{4x}{3} \text{ р. зарплата за декабрь;}$$

$$\frac{4x}{3} - \frac{9x}{8} = 400 \quad x=1920$$

;

$$4) \frac{9x}{8} + x + \frac{4x}{3} = \frac{27x + 24x + 32x}{24} = 6640 \text{ трехмесячный заработок;}$$

$$5) 6640 : 100 \cdot 40 = 2656 \text{ р. премия.}$$

Ответ: 2656.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение
2,5	Правильно составлено выражение для трехмесячного заработка ИЛИ Решение верное, но из-за некоторых неточностей правильный ответ не получен (возможна ариф-

	метическая ошибка).
2	Правильно найдено значение зарплаты за ноябрь
1,5	Правильно составлено выражение для зарплаты за октябрь И декабрь
1	Правильно составлено выражение для зарплаты за октябрь ИЛИ декабрь
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

5. (4 балла). Из сосуда, наполненного чистым глицерином, отлили 1 л, после этого в сосуд добавили 1 л воды. Затем отлили 1 л смеси и вновь долили 1 л воды. То же самое проделали в третий раз, в результате чего воды в сосуде стало в 7 раз больше, чем глицерина. Найдите объем сосуда.

Решение: Пусть x л - объем сосуда, отсюда x л – первоначальное количество глицерина

Первое переливание. $(x - 1)$ - количество глицерина после первого переливания

$\frac{x-1}{x}$ -. концентрация смеси после первого переливания.

	M	m	c
1	x	$x-1$	$\frac{x-1}{x}$
2	x	$x-1-1 \cdot \frac{x-1}{x} = \frac{x(x-1)-(x-1)}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$	$\frac{(x-1)^2}{x^2}$
3	x	$\frac{(x-1)^2}{x} - 1 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{(x-1)^3}{x^2}$	$\frac{(x-1)^3}{x^3}$

По условию после третьего переливания глицерин составляет 1 часть, а вода – 7 частей

$1 + 7 = 8$ частей – составляет вся смесь, которая занимает весь объём

Отсюда $1/8$ - концентрация смеси после третьего переливания. Имеем уравнение $\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$x = 2$ л - объем сосуда

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
4	Полное верное решение
3	Решение верное, но из-за некоторых неточностей правильный ответ не получен (возможна арифметическая ошибка, не произведен отбор корней).
2	Уравнение составлено верно
1,5	Правильно определено количество или найдена доля глицерина в сосуде после третьей операции
1	Правильно определено количество или найдена доля глицерина в сосуде после второй операции
0,5	Правильно определено количество или найдена доля глицерина в сосуде после первой операции
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАРАФОН СТАРШЕКЛАССНИКОВ

22 сентября 2019 г.

Квадратный трехчлен и теорема Виета

1. (1 балл) Решить уравнение $x^2 + 4 = (x + 4)^2$

Решение. $x^2 + 4 = x^2 + 8x + 4^2$, $x = -12/8$

Ответ: -1,5

Критерии оценки.

1 балл	Задание решено верно. Получен верный ответ
0,5 балла	Задание решено верно. Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе или описка, которая повлияла на ответ. ИЛИ верно получен интервал, но число целых значений не указано.
0 баллов	Ответ не верен

2. (1 балл) Оценивается лишь одна из двух задач. Задание а) тем, кто по программе изучал производную; задание б) необходимо выполнять тем, кто по программе изучал логарифмы. Баллы выставляются только за одно из заданий: или только за а) или только за б).

а. Найти длину промежутка убывания функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2019$

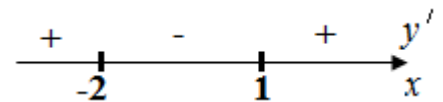
б. Укажите число целых значений переменной из области определения функции

$$y = \lg\sqrt{2 - x - x^2}$$

Решение.

а) Вычислим производную функции и найдем критические точки: $y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0$. $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Функция убывает на промежутке $x \in (-2; 1)$, длина которого 3

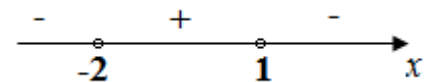


Ответ: 3

Критерии оценки.

1 балл	Задание решено верно. Получен верный ответ
0,5 балла	Задание решено верно. При вычислении длины промежутка допущена ошибка.
0 баллов	Ответ не верен

б) Область определения функции: $2 - x - x^2 > 0$
(подкоренное выражение неотрицательно,
подлогарифмическое строго положительно)
 $x \in (-2; 1)$, промежуток включает два целых значения:
-1, 0



Ответ: 2

Критерии оценки.

1 балл	Задание решено верно. Получен верный ответ
0,5 балла	Задание решено верно. Число целых значений найдено с ошибкой.
0 баллов	Ответ не верен

3. (2 балла) Решить уравнение $2x^2 - 2019x + 2017 = 0$

Решение.

Заметим, что сумма коэффициентов квадратного уравнения равна нулю: $a + b + c = 2 +$

$(-2019) + 2017 = 0$. В этом случае, корни квадратного уравнения равны: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = c/a \end{cases}$

Ответ: $x=1$; $x=1008,5$

Критерии оценки.

2 балла	Задание решено верно. Обоснованно получен верный ответ.
1 балл	Задание решено верно. Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе или описка, которая повлияла на ответ.
0,5 баллов	Написан верный ответ, но решение не обосновано.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

4. (2 балла) Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. В какой момент времени мяч будет находиться на максимальной высоте?

Решение.

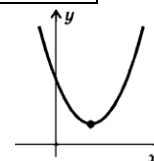
Момент времени, когда мяч будет находиться на максимальной высоте соответствует абсциссе вершины параболы (ветви вниз), т.е. $t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-10} = 0,8$

Ответ: 0,8

Критерии оценки.

2 балла	Задание решено верно. Обоснованно получен верный ответ.
1 балл	Задание решено верно. Допущена арифметическая ошибка на последнем этапе или описка, которая повлияла на ответ (не правильный знак, ошибка в формуле являются грубыми ошибками).
0,5 баллов	Ход решения верен, но допущена арифметическая ошибка. ИЛИ написан верный ответ, но решение не обосновано.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

5. (3 балла) Укажите количество точек пересечения графиков функции $y = ax^2 + bx + c$ (см рисунок) и $y = abx - c$, имеющих положительную абсциссу.

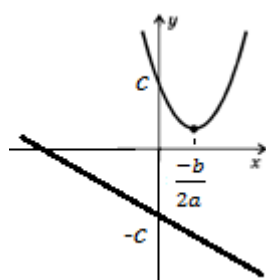
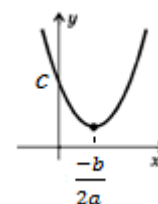


Решение.

Анализируя график, получаем знаки на a, b, c :

$\frac{-b}{2a} > 0$ (абсцисса вершины положительна), следовательно, $ab < 0$ – линейная функция убывающая.

$c > 0$ – точка пересечения с осью ординат, $y = abx - c$ график пересекает ось ординат в точке $-c$.



В зависимости от угла наклона, возможные точки пересечения могут находиться (доказывать этого не нужно) только для отрицательных абсцисс.

Ответ: 0

Критерии оценки.

3 балла	Приведено верное, обоснованное решение. Получен верный ответ.
2 балла	Приведено верное, обоснованное решение. Получен верный ответ. В решении существуют ошибки в фактах, не использованных в доказательствах
1 балл	В решении задачи есть значительные продвижения, но решение не доведено до конца.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.

6. (3 балла) Найти разность между большим и меньшим корнями уравнения $2y^2 - my + n = 0$, где m – сумма, а n произведение корней уравнения $x^2 - 2\sqrt{2}x - 7 = 0$.

Решение.

Разность между наибольшим и наименьшим корнями положительна:

$$y_1 - y_2 = +\sqrt{(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 4\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(-7)} =$$

$$= \sqrt{2 + 14} = 4.$$

$$m = 2\sqrt{2}, n = -7.$$

Ответ: 4

Критерии оценки.

3 балла	Верно применена теорема Виета в обоих случаях. Проведены верные преобразования. Получен верный ответ. Объяснен знак при переходе к корню.
2,5 балла	Верно применена теорема Виета в обоих случаях. Проведены верные преобразования. Получен верный ответ. Нет объяснения знака при переходе к корню.
2 балла	Верно применена теорема Виета в обоих случаях. Проведены верные преобразования. Получен не верный ответ из-за арифметической ошибки или описки.
1 балл	В решении задачи есть значительные продвижения, но решение не доведено до конца.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из перечисленных критериев.