

Олимпиада им. Г.П. Кукина

2020-21 уч. Год

5 класс

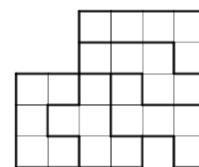
Решения задач довывода

1. Незнайка заметил, что в феврале некоторого года понедельников меньше, чем четвергов. На какой день приходится 1 января в этом году? (К.Н. Пахомова, И.А.Круглова)

Ответ: понедельник. Решение. В феврале обычного года 28 дней, високосного – 29 дней. 28 дней – это 4 полных недели, значит, одинаковое количество всех дней недели (по четыре каждого). Раз понедельников меньше, чем четвергов, то данный год високосный, и в феврале 4 понедельника и 5 четвергов. Поэтому февраль, состоящий из 29 дней, начинается с четверга и четвергом заканчивается. В январе 31 день: 4 полных недели и три дня. Поэтому 1 января в данном високосном году приходится на понедельник.

2. Компьютер напечатал на ленту числа 1, 2, 3, ..., 2000 подряд без пробелов между числами. Получилась строка цифр 1234567891011...2000. Сколько раз в этой строке встретится группа цифр 2021? (А.В. Шаповалов)

Ответ: 2 раза. Решение. В указанной последовательности сочетание «202» впервые встретится здесь ...1819**202**122.... Легко видеть, что там есть «2021». Далее «202» встречается в ...200201**202**203..., ...**22022**1222... Последовательность «2021» здесь не встречается. Следующее место, где встречается «202» ...120012011**202**1203..., причем также есть и последовательность «2021». Далее сочетание «202» не встречается, поэтому не встретится и «2021».



3. Король Башмакии хочет разделить земли королевства между пятью своими дочерями. справедлив: все дочери должны получить части одинаковой площади и одинакового периметра. Но вредные девицы заявили, что хотят части разной формы. Как королю разделить земли, выполнив все три условия? План королевства перед вами. Делить можно только по линиям сетки. (К.Н. Пахомова)



Король

Ответ: например, как на рисунке справа.

Комментарий: в разрезании на пятиклеточные фигуры должна отсутствовать такая фигура

4. Чему равно **ВЫ**, если $\mathbf{ВЫ} \times 4 = \mathbf{КОТ}$, $\mathbf{ВЫ} \times 21 = \mathbf{ЛВВЫ}$?

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные. (К.Н. Пахомова, И.А.Круглова)

Ответ: 85. Решение 1: перепишем второе равенство в виде $\mathbf{ВЫ} \times 20 + \mathbf{ВЫ} = \mathbf{ЛВ} \times 100 + \mathbf{ВЫ}$, $\mathbf{ВЫ} \times 20 = \mathbf{ЛВ} \times 100$, $\mathbf{ВЫ} = \mathbf{ЛВ} \times 5$. Поэтому $\mathbf{В} \neq 0$ или $\mathbf{В} = 5$. Но $\mathbf{В} \neq 0$, т.к. $\mathbf{ВЫ} \times 4$ оканчивается на Т, а не на В. Подставим $\mathbf{В} = 5$ в полученное равенство $\mathbf{В} \times 10 + 5 = \mathbf{ЛВ} \times 5$, тогда $\mathbf{В} \times 2 + 1 = \mathbf{ЛВ}$. $\mathbf{В} > 5$ и однозначное число, поэтому рассматриваем варианты:

$\mathbf{В} = 6$, $6 \times 2 + 1 = 13 = \mathbf{ЛВ}$, но $65 \times 4 = 260$, т.е. $\mathbf{О} = 6 = \mathbf{В}$, противоречие с условием задачи.

$\mathbf{В} = 7$, $7 \times 2 + 1 = 15 = \mathbf{ЛВ}$, но тогда $\mathbf{Б} = 5 = \mathbf{В}$, противоречие с условием задачи.

$\mathbf{В} = 8$, $8 \times 2 + 1 = 17 = \mathbf{ЛВ}$, $85 \times 21 = 1785$ и $85 \times 4 = 340$, противоречий нет – подходит.

$\mathbf{В} = 9$, $9 \times 2 + 1 = 19 = \mathbf{ЛВ}$, но $\mathbf{Б} = 9 = \mathbf{В}$, противоречие с условием задачи.

У парного ребуса единственное решение и $\mathbf{ВЫ} = 85$.

Решение 2: $\mathbf{В} + 2\mathbf{В}$ оканчивается на В. Значит, $2\mathbf{В}$ делится на 10, тогда $\mathbf{В}$ или 0, или 5. Но если $\mathbf{В} = 0$, $\mathbf{Т} = 0$, а это противоречит тому, что разные буквы – это разные цифры. Значит, $\mathbf{В} = 5$. Т.к. $\mathbf{ВЫ} \times 21 > 999$, $\mathbf{ВЫ}$ не меньше 48. А т.к. $\mathbf{В} = 5$, то $\mathbf{В} > 5$. Далее рассматриваем варианты, как в решении 1.

5. Лиса хочет построить однокомнатную ледяную избушку: квадратная комната должна иметь размеры 40×40 , высота стен - 30, должно быть 2 окна размером 15×20 и дверь размером 25×10 . Толщина стен равна 4. Сколько ледяных блоков размера $1 \times 2 \times 4$ ей потребуется, если пол и крыша будут деревянными? Ледяные блоки складываются друг на друга, ломать их нельзя. (С.В. Усов)

Ответ: 2215. Решение. Внутренний квадрат 40×40 , внешний, в виду толщины стен, 48×48 . Посчитаем необходимый нам для постройки дома объем материалов:

$$48 \times 48 \times 30 - 40 \times 40 \times 30 = 30 \times (48 - 40) \times (48 + 40) = 21\,120.$$

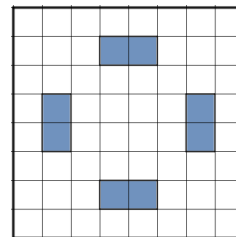
Теперь с учетом двери и двух окон:

$$21\,120 - 25 \times 10 \times 4 - 15 \times 20 \times 4 \times 2 = 21\,120 - 1000 - 2400 = 17\,720,$$

$$17\,720 / 8 = 2215.$$

6. Меняла на рынке дает 5 серебряных монет за 11 медных, 3 золотых за 7 серебряных и 2 медных, 5 медных за 1 золотую и 1 серебряную. У купца до обмена была 1000 монет, а после обмена стало 300. Не обманывает ли меняла? (С.В.Усов)

Ответ: меняла обманывает. **Решение:** Количество монет изменится либо на 6, либо на 3, исходя из чего остаток при делении на 3 количества монет у купца не меняется. Однако у 1000 и 300 разные остатки при делении на 3. Значит, меняла обманывает.



Решения задач вывода

7. Капитан Врунгель утверждает, что в игре «Морской бой» на поле 8×8 клеток расставил 4 «двухпалубных» корабля так, что у него не осталось места для «трёхпалубного» корабля. Прав ли он? («Двухпалубный» корабль – прямоугольник 1×2 , а «трёхпалубный» – 1×3 . Корабли так, что их разделяет по крайней мере одна клетка на поле по горизонтали, по вертикали и по диагонали). (К.Н. Пахомова)

Ответ: прав. **Решение.** Следующая расстановка четырёх «двухпалубных» кораблей не дает возможности поставить «трёхпалубный» корабль.

8. В стране рыцарей и лжецов три бегуна стартовали в порядке А-В-С. После финиша каждый сделал по два заявления.

А: “На середине дистанции я был между В и С”. “Я финишировал первым”.

В: “На середине дистанции я был между А и С”. “И финишировал тоже между А и С”.

С: “На середине дистанции я бежал ближе всего к А”. “И финишировал по соседству с А”.

Установите порядок финиша, если известно, что позиция каждого бегуна на середине дистанции отличалась от его позиции как на старте, так и на финише.

Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. (С.В.Усов)

Ответ: первым пришел С, вторым А, третьим В.

Решение 1. Заметим, что высказывания В и С противоречат друг другу, поэтому если В рыцарь, то С лжец, а если В лжец, то С рыцарь.

Пусть В – рыцарь. Получаем, что позиции в середине и в конце дистанции следующие: СВА и АВС (соответственно). Можно заметить, что позиция В в середине дистанции совпадает с его позицией в начале и в конце дистанции, а это противоречит условию. Значит, В – лжец, и, следовательно, С – рыцарь.

Рассмотрим теперь все возможные варианты расположения А, В и С в середине дистанции: 1) АВС (не подходит, т.к. позиции А, В и С совпадают с их позициями на старте), 2) АСВ (не подходит, т.к. позиция А совпадает с его позицией на старте), 3) ВСА, 4) ВАС (не подходит, т.к. позиция С совпадает с его позицией в начале дистанции), 5) САВ, 6) СВА (не подходит, т.к. В опять второй). Таким образом, осталось проверить два варианта.

Первый вариант: ВСА. Тогда на конечной позиции: А не первый, т.к. А – лжец, А не последний, т.к. его позиции в конце и середине не совпадают. Значит, А второй. В не первый, значит, на финиш пришли в следующем порядке: САВ.

Второй вариант: САВ. Тогда А говорит правду и пришел на финиш первым. Т.к. и С говорит правду, С второй. В вынужден быть последним, но он последний на середине дистанции. Опять противоречие.

Решение 2. Составим таблицу, где укажем номер в начале дистанции, середине и на финише, а также рыцарь или лжец.

	Старт	Середина	Финиш	
A	1	↔ не первый		
B	2	↔ не второй		Лжец, т.к. позиция на середине дистанции должна отличаться от финиша (и там, и там не может быть второй)
C	3	↔ не третий		

Если A – рыцарь, то

	Старт	Середина	Финиш	
A	1	2	1	Рыцарь
B	2	не второй, остается только 3-м	не второй и не первый, т.е. 3	Лжец
C	3	не третий и не второй, тогда 1	тогда прибежал 2-м	

получаем противоречие, т.к. совпали номера на середине и на финише у бегуна B. Поэтому A – лжец.

	Старт	Середина	Финиш	
A	1	не второй	не первый, получается 2-й, т.к. двое других не могут быть вторым.	Лжец
B	2	не второй	не второй	Лжец
C	3	тогда ему остается быть 2-м	не второй	

A прибежал вторым. Поэтому либо B-A-C, либо C-A-B.

	Старт	Середина	Финиш	
A	1	↔ не второй и не первый, остается 3-й	2	Лжец
B	2	Тогда только мог 1-й – единственный свободный	не первый и не второй, тогда 3-й	Лжец
C	3	2	Остается только 1-м	

Получаем C-A-B (даже не важно, кто был C - рыцарь или лжец).

9. Старший брат ездит на велосипеде со скоростью 25 км/ч, младший - со скоростью 20 км/ч. Однажды старший брат поехал из дома в школу (15 км по велосипедной дорожке), но по пути велосипед сломался. Он мгновенно позвонил младшему брату, и тот тут же выехал к нему на новом велосипеде, после чего со сломанным велосипедом пошел домой. А старший брат добрался на новом велосипеде до школы, затратив на весь путь вдвое больше времени, чем обычно. Не быстрее ли было ему от места поломки велосипеда пойти до школы пешком? Ходит он со скоростью 5 км/ч? (С.В.Усов)

Ответ: пешком быстрее. **Решение.** Старший потратил на путь от дома до школы $15/25=3/5$ часа плюс время ожидания младшего брата, и это по условию $2*(3/5)$ часа. Значит, младший потратил на путь до старшего $3/5$ часа и проехал $20*(3/5) = 12$ км. Таким образом, старший ждал младшего $3/5$ часа. А пешком оставшиеся 3 км он прошёл бы ровно за это же время. Т.е. старшему быстрее было сразу пойти пешком.

10. Имеется несколько одинаковых игральных кубиков (сумма точек на противоположных гранях равна 7). Из них сложили конструкцию, прикладывая грани с одинаковым числом точек друг к другу. Вид сверху, спереди и справа:



Определите количество кубиков, а также найдите вид сзади. (С.В.Усов)

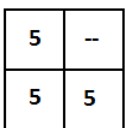
Ответ: 6 кубиков, вид сзади:

Решение.

Если приложить друг к другу 2 кубика одинаковыми числами, чтобы на передней грани было одно и то же число (скажем, 2), то на верхних гранях этих кубиков будут значения, дополняющие друг друга до 7 (скажем, 1 и 6). Будем называть второй кубик в такой паре *перевернутым относительно первого*: числа на его боковых грани, а также на верхней и нижней, поменялись на противоположные, в то время как на передней и задней они одинаковые.

Рассмотрим переднюю грань конструкции. На всех кубиках 2, а сверху на верхних кубиках - 1. Значит, чтобы добиться одинаковых чисел на верхних гранях конструкции, соседние столбцы передней грани конструкции по высоте должны отличаться на 1. Кроме того, правый столбец передней грани конструкции является одновременно и левым столбцом правой грани конструкции, а, значит, соседние кубики в нём перевернуты относительно друг друга. Но это противоречит виду правой грани конструкции. Следовательно, правый столбец передней грани конструкции содержит один кубик, а левый - 2 кубика. Аналогично, левый столбец правой грани конструкции содержит 1 кубик, правый - 2.

Представим, что кубики прозрачные и посмотрим на конструкцию спереди. На задних гранях кубиков передней грани конструкции находятся 5-ки.

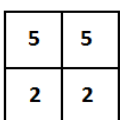


это передняя грань конструкции

Значит, и на передних гранях кубиков задней грани конструкции, соприкасающихся с кубиками передней грани, тоже 5-ки. Представим, что кубики прозрачные и посмотрим спереди на передние грани кубиков задней грани конструкции.



это задняя грань конструкции



вид сзади

Очевидно, что кубики в левом столбике должны быть перевернуты друг относительно друга, равно, как и кубики в нижнем ряду. У нижнего правого кубика на верхней грани 6, значит, и у верхнего левого, если он есть, тоже 6. А это противоречит виду сверху. Значит, кубиков всего 6, и вид сзади:

