

Олимпиада им. Г.П. Кукина 2020-21 уч год
6 класс

1. Незнайка заметил, что в феврале некоторого года понедельников меньше, чем четвергов. Чего больше в предыдущем году: понедельников или воскресений? (Пахомова К.Н., Круглова И.А.)

Ответ. Воскресений.

Решение. Так как в феврале некоторого года понедельников меньше, чем четвергов. Это означает, что в феврале 29 дней ($29 = 7 \cdot 4 + 1$), поэтому начинается и заканчивается февраль одним днем недели - четвергом.

В январе 31 день ($31 = 7 \cdot 4 + 3$) и заканчивается он в этом году средой, (значит 3 января тоже среда) значит, 1 января понедельник.

Так как этот год содержит в феврале 29 дней, он високосный, значит предыдущий не високосный и содержит 365 дней, $365 = 7 \cdot 52 + 1$, поэтому начинается и заканчивается год одним и тем же днем недели

31 декабря воскресенье значит 1 января воскресенье.

Поэтому воскресений больше чем всех остальных дней недели, а значит и понедельников.

Если дети спрашивают, сколько дней в обычном или високосном году, отвечаем без штрафных баллов, это же касается числа дней в январе, но не в феврале.

2. Компьютер напечатал на ленту числа 1, 2, 3, ..., 2222 подряд без пробелов между числами. Получилась строка цифр 1234567891011...22212222. Сколько раз в этой строке встретится группа цифр 2021? (Шаповалов А.В.)

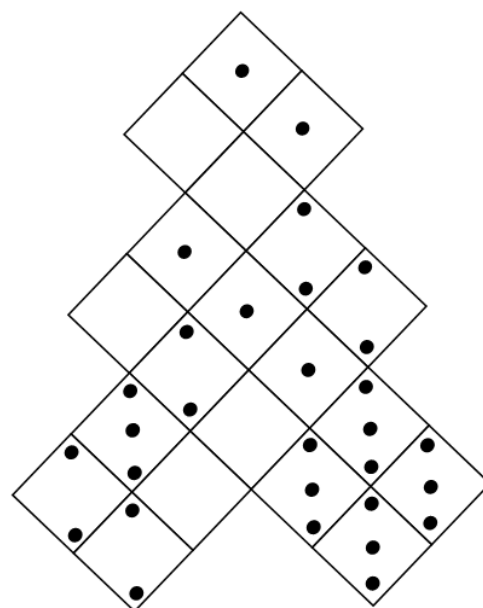
Ответ. 4

Решение.

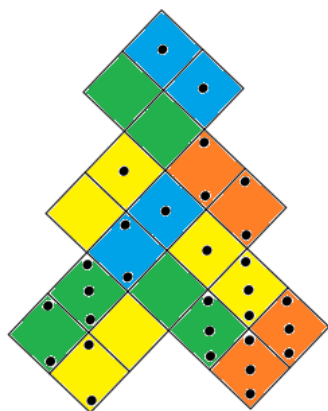
- Числа 20 и 21 могут встретиться как самостоятельное число 2021 – один случай.
- Числа 20 и 21 могут встретиться как части разных чисел (**20, 21**) – два случая 20, 21 и 2120, 2121.
- Числа 20 и 21 могут встретиться как части чисел *202, 1*** (возможные варианты: 202, 203 – не подходит, 1202, 1203 - подходит) или ***2, 021* (число не может начинаться с нуля, таких ситуаций не будет).

Итого 4 варианта.

3. У Машеньки есть набор домино. Из нескольких костяшек этого набора она сложила ёлочку (см. рисунок). Как проходят границы между костяшками? Объясните свой ответ. В наборе домино нет одинаковых костяшек, самая маленькая костяшка пустая 0×0 , самая большая 6×6 . (Чернявская И.А.)



Ответ..
Решение.



4. Удав полз по прямой тропинке и около пальмы встретил Попугая, бегущего ему навстречу со скоростью в три раза большей. Кивнув друг другу, они продолжили свое движение дальше по тропинке. Оказавшись около хвоста Удава, Попугай спохватился, что забыл передать ему привет от Мартышки! Он повернул назад и, двигаясь с той же скоростью, вернулся к пальме, но на этот момент на уровне пальмы находилась середина Удава. Решив быстрее догнать Удава, Попугай увеличил скорость в два раза. Определите, сколько шагов прошел Попугай от момента первой встречи и до возвращения к голове, если известно, что длина Удава 300 см, а один шаг Попугая равен 0,9 см. (длина шага Попугая не зависит от скорости с которой он идет). (Круглова И.А.)

Ответ. 700 шагов
Решение.

Так как первоначально скорость Удава в три раза меньше и до возвращения Попугая к пальме Удав прополз половину своей длины, следовательно, Попугая прошел в три раза больше, т.е. 450 см.

Затем скорость Попугая стала в 2 раза больше, значит за то же время он прошел в 6 раз больше Удава, т.е. он прошел вторую половину удава – 5 частей и еще одну часть, которую за это время прополз Удав. Если 150 см – 5 частей, то 180 см – 6 частей.

Всего Попугай прошел 630 см, что при длине шага 0,9 см соответствует 700 шагам.

5. В стране рыцарей и лжецов 4 бегуна стартовали в порядке А-В-С-Д один за другим. После финиша каждый сделал по два заявления.

А: “На середине дистанции я бежал сразу за Д”. “Я финишировал между В и С”.

В: “На середине дистанции я бежал сразу за Д”. “Я финишировал между А и С”.

С: “На середине дистанции я бежал сразу за А”. “Я финишировал между А и В”

Д: “На середине дистанции я бежал сразу за А”. “Я победил”.

Установите порядок финиша, если известно, что позиция каждого бегуна на середине дистанции отличалась от его позиции на финише, а среди бегунов были хотя бы 2 рыцаря.

(Усов С.В.)

Ответ. ДСВА
Решение.

Утверждения про порядок финиша от А, В и С противоречат друг другу - среди них не более одного рыцаря. Но рыцарей хотя бы двое, тогда среди них точно есть рыцарь, и Д -

тоже рыцарь (и победитель). Из оставшихся рыцарь именно В, поскольку утверждения А и С противоречат утверждению Д про середину дистанции.

Тогда на середине дистанции позиции могли быть: САДВ и АДВС. Второй случай невозможен, поскольку рыцарь В финишировал третьим. Первый же случай исключает возможность финиша А на 2-й позиции, значит финиш был таким: ДСВА.

6. Есть n гирь целых весов $1, 2, \dots, n$ г. При каком наименьшем n можно их все разложить на 3 кучки одинакового веса так, чтобы количество гирь во всех кучках было разным? (Шаповалов А.В.)

Ответ. 9

Решение. Так как кучки три понадобится не менее $1+2+3=6$ гирек, их общая масса $1+2+3+4+5+6=21$, значит масса каждой кучки 7 г, такой гирьки нет среди предложенного набора.

Набор из 7 гирек $1+2+3+4+5+6+7=28$ не дает возможности получить кучки равных весов.

Набор из 8 гирек $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, масса каждой кучки 12 г, такую массу невозможно набрать одной гирькой, значит гирек должно быть не меньше $2+3+4=9$.

Набор из 9 гирек $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, масса каждой кучки 15 г. Примеров организовать кучки несколько, один из возможных: $7+8, 1+5+9, 2+3+4+6$.

Нужно пояснять, что есть гирьки всех весов, начиная с 1 и до n .

7. Петя и Вася играют: каждый в свой ход проводит на плоскости прямую (изначально плоскость пуста). Проигрывает тот, после хода которого плоскость окажется разбита на двузначное число областей. Кто выиграет при правильной стратегии? (Усов С.В.)

Ответ. Вася

Решение.

В каждый свой ход Вася проводит прямую параллельно только что проведенной прямой Пети. После первого хода Васи прямые разбивают плоскость на 3 области.

Если Петя вторым ходом проведет прямую не параллельно первым двум, то областей станет 6, а после второго хода Васи - 9, и следующим ходом Петя проиграет.

Если Петя проведет вторую прямую параллельно первым двум, то после второго хода Васи плоскость будет разбита на 5 областей. Значит, третьим ходом Петя вынужден проводить прямую вновь параллельно первым четырем (иначе он получит 10 областей и проиграет). Тогда после третьего хода Васи на плоскости будет 7 областей, после 4-го - 9, и на пятом ходу Петя неизбежно проигрывает.

8. Меняла на рынке дает 5 серебряных монет за 11 медных и 3 золотых за 7 серебряных. У купца до обмена была 1001 медная монета, а после обмена стало 333 серебряных и золотых. Может ли быть так, что меняла - честный? (Усов С.В.)

Ответ. нет

Решение.

1001 медную монету можно поменять на $1001 \cdot \frac{5}{11} = 455$ серебряных монет. При замене 7

серебряных на 3 золотых количество монет уменьшается каждый раз на 4. Меняла уменьшил количество монет на $455-333=122$, что не делится на 4. Значит, меняла обманул купца.

9. На ежегодном турнире Средиземья эльф Леголас в стрельбе из лука попал в десятку столько раз, сколь эльф Халдир попал в девятку, в девятку Леголас попал столько раз, сколь Халдир попал в восьмерку, а в восьмерку Леголас попал столько раз, сколь Халдир попал в десятку. Эльфы отлично стреляют из лука, всего было выпущено 30 стрел и все они попали точно только в 8, в 9, или в 10. Оказалось, что в сумме Леголас и Халдир набрали одинаковой число очков. Сколько раз Халдир попал в 10? (Круглова И.А., Мещеряков Е.В.)

Ответ. 5

Решение.

Так как всего было 30 попаданий и число попаданий каждого удваивается, то каждый попал по 15 раз:

	10	9	8
Леголас	x	y	z
Халдир	z	x	y

Заменим все попадания Халдира в “10” на попадания в “7”. Тогда каждым выстрелом Халдир набирает на одно очко меньше, чем Леголас, и, в итоге, набрал бы на 15 очков меньше. Но он набрал столько же. А так как каждый выстрел в “10” отличается от выстрела в “7” на 3 очка, то таких выстрелов было пять.

10. Имеется 17 одинаковых игровых кубиков (сумма точек на противоположных гранях равна 7). Из них сложили конструкцию, прикладывая грани с одинаковым числом точек друг к другу. Ниже представлены виды сверху, спереди и справа (для удобства записи вместо точек написаны цифры):



вид сверху

1	1	1
1	1	1
1	1	1

вид спереди

2		2
2	2	2
2	2	2

вид справа

3		3
3	3	3
3	3	3

Найдите вид слева. (Усов С.В.)

Решение: Рассмотрим переднюю грань конструкции. На всех кубиках 2, а сверху на верхних кубиках - 1. Если приложить друг к другу 2 кубика одинаковыми числами, чтобы на передней грани было одно и то же число (скажем, 2), то на верхних гранях этих кубиков будут значения, дополняющие друг друга до 7 (скажем, 1 и 6). Будем называть второй кубик в такой паре перевернутым относительно первого: числа на его боковых грани, а также на верхней и нижней, поменялись на противоположные, в то время как на передней и задней они одинаковые. Значит чтобы добиться одинаковых чисел на верхних гранях конструкции, соседние столбцы передней грани конструкции по высоте должны отличаться на 1. Кроме того, правый столбец передней грани является одновременно и левым столбцом правой грани, а значит соседние кубики в нём перевернуты относительно друг друга, но по виду правой грани следует, что это не так. Значит, правый столбец передней грани содержит один кубик, средний - 2 кубика, левый - 1 или 3. Аналогично, левый столбец правой грани содержит 1 кубик, средний - 2, правый - 3 (иначе в виде спереди правый столбик не мог быть высоты 3).

Итак, нам известно расположение всех кубиков: 9 находятся на нижнем уровне, на передних гранях ближайшего к нам ряда 2-2-2, на задних (а значит и на передних гранях второго ряда) 5-5-5,

соответственно на задних гранях третьего ряда тоже 5-5-5. Вид сверху кубиков нижнего слоя (поскольку в любой паре соседних кубиков второй перевернут относительно первого):

1(б)	6	1(в)
6	1	6
1(а)	6	1

А значит, еще 4 кубика стоят на втором уровне в позициях, где на рисунке 6 (чтобы сверху была 1). Еще 2 кубика - в заднем правом столбце (в), ещё 2 - в одном из левых столбцов: (а) или (б). Судя по виду справа, они находятся именно в столбце (а).

Рассмотрим второй уровень:

-	1(д)	6(в)
1	-	1(г)
6	1	-

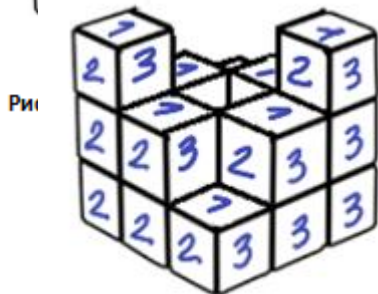
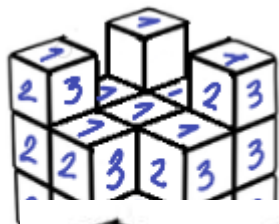
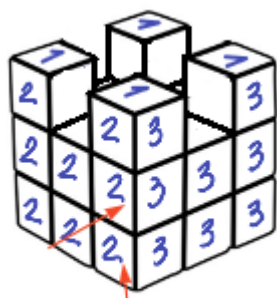
Вид сзади: нижние кубики 5-5-5 (уже выяснили). На кубике (г) спереди 2, именно её мы видим на виде спереди, значит сзади на кубиках (д) и (в) также 2 (они перевернуты относительно нижних, у них совпадают значения на гранях справа), получаем:

5		5(х)
2	2	2(у)
5	5	5

Кубик (х) находится на передней грани, кубик (у) - посередине. Аналогично определяется вид слева.

4		4
3	3	3
4	4	4

2 способ



Исходя из вида сверху, спереди и справа можно составить конструкцию (рисунок 1). Конструкция содержит 22 кубика, это на 5 больше числа данного в задаче. Кроме того нужно проверить везде ориентацию кубиков. Рассмотрим вид спереди.

По условию, кубики имеют одинаковую ориентацию (если 1 сверху, то при обходе по часовой стрелке точки будут идти так: 2, 3, 5, 4, если 6 сверху, то эти точки будут идти в обратном направлении). Второй и третий кубики сверху в правом столбце не могут быть так расположены, так как, исходя из ориентации, это противоречит правилу соединения кубиков. Поэтому в правом столбце передней грани может быть только один кубик. В среднем столбце соответственно два, для соблюдения вида справа и спереди в первом столбце передней грани и в третьем столбце боковой должно быть по три кубика (рисунок 2).

В получившейся раскладке нет противоречий с ориентацией кубиков и все три вида (сверху, спереди и справа) соответствуют условию. Итого кубиков 20.

Для того чтобы выполнялись условия задачи и кубиков было 17, необходимо убрать кубики которые не повлияют на выполнение

условий задачи. Это центральный кубик (кубик под ним поворачиваем 1 вверх) и два кубика, стоящие в дальнем столбце (рисунок 3).

Итак, имеем:

верхний слой

-	-	1
-	-	-
1	-	-

средний слой

-	1	6
1	-	1
6	1	-

нижний слой

1	6	1
6	1	6
1	6	1

Вид снизу

6	1	6
1	6	1
6	1	6

Вид спереди первый
слой

2	-	-
2	2	-
2	2	2

Вид спереди второй
слой

-	-	-
5	5	2
5	5	5

Вид спереди третий
слой

-	-	2
-	5	5
2	2	2

Вид сзади

5	-	5
2	2	2
5	5	5

Вид справа первый
слой

-	-	3
-	3	3
3	3	3

Вид справа второй
слой

-	-	-
3	-	4
4	4	4

Вид справа третий
слой

3	-	-
4	4	-
3	3	3

Вид слева

4	-	4
3	3	3
4	4	4