

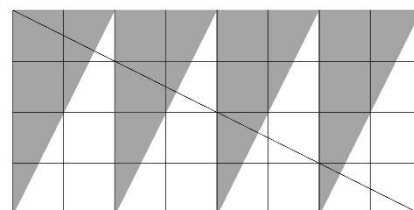
Олимпиада им. Г.П. Кукина

2020-21 уч. Год

7 класс

Задачи.

1. Мы называем числа от 1 до 2021, и каждый раз вместо числа содержащего “5” или делящегося на пять, говорим “Ой”. Сколько раз было сказано “Ой”?
2. Меняла на рынке дает 5 серебряных монет за 11 медных и 3 золотых за 7 серебряных. Купец принес несколько мешков, в каждом по 55 медных монет, за что меняла предложил ему 375 золотых, но купец ответил, что ему нужно, чтобы монет всех видов было поровну. Сколько золотых монет будет у купца после обмена, если меняла - честный?
3. Раскрасьте клетки доски 5x5 в 6 цветов так, чтобы в каждом ряду из 5 клеток – по вертикали, горизонтали и диагонали – встречались клетки ровно двух цветов.
4. Однажды дети водили хоровод, и оказалось, что число детей, стоявших рядом ровно с одним Борисом меньше, чем число Глебов; притом любой ребёнок, не стоявший рядом с Борисом, был либо сам Борис, либо Глеб. Кого было больше в хороводе, мальчиков или девочек?
5. Имеется мишень с 4 концентрическими кругами. Чтобы попасть в центральный 10 очковый, лучнику необходимо целиться 90 секунд, чтобы выбить 6 очков - 50 секунд, чтобы выбить 3 очка - 30 секунд, наконец чтобы выбить 1 очко - 12 секунд (прицеливание учитывает время полёта стрелы, если лучник будет целиться менее 12 секунд, то в мишень не попадет). За какое наименьшее время лучник сможет выбить ровно 125 очков?
6. Красно-белый флаг разрезали по диагонали на две половины (см.рис. по клеточкам). На какой из частей красной краски больше, на верхней или на нижней?



7 класс. Решения.

1. (Кукина Е.Г.) Мы называем числа от 1 до 2021, и каждый раз вместо числа содержащего "5" или делящегося на пять, говорим "Ой". Сколько раз было сказано "Ой"?

Ответ: 708 «ой».

Решение. Среди названных 202 числа заканчивается на 0 (а потому делится на 5) и были заменены на «ой». Еще 202 числа заканчиваются на 5 и были заменены на «ой». Кроме того, есть еще 160 чисел замененных на «ой» по причине цифры 5 в разряде сотен (разряд тысяч 0 или 1, разряд десятков – любая из 10 цифр, разряд единиц – считаем цифры не 0 и не 5, т.е. 8 возможностей). Из оставшихся $2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ с 5 в разряде десятков. Итого: $202 \cdot 2 + 160 + 144 = 708$ «ой».

Критерии: Посчитано количество чисел содержащих цифру 5 правильно — 2 балла.
Посчитано правильно количество чисел, делящихся на 5 — 1 балл.
Полное решение — 7 баллов.

2. (Усов С.В.) Меняла на рынке дает 5 серебряных монет за 11 медных и 3 золотых за 7 серебряных. Купец принес несколько мешков, в каждом по 55 медных монет, за что меняла предложил ему 375 золотых, но купец ответил, что ему нужно, чтобы монет всех видов было поровну. Сколько золотых монет будет у купца после обмена, если меняла - честный?

Ответ: 231 золотых.

Решение. 375 золотых эквивалентно 875 серебряных, что эквивалентно 1925 медных (т.е. 35 мешков). X монет всех достоинств переведем в медь. Это будет X медными + $11/5$ X серебряными + $77/15$ X золотыми. Итого $25/3$ X общая сумма. $X = 231$ монета.

А именно: 231 монету оставляем, 1694 меняем на 770 серебряных. 231 оставляем, и 539 серебряных меняем на 231 золотую.

Критерии: Вычислено, что вначале у купца было 35 мешков монет — 1 балл.
Приводить алгоритм обмена, чтобы получилась нужная сумма — не обязательно (в решении он есть).
Верный ответ с проверкой без обоснования – 2 балла.
Если вычислено, что медных монет 1925 – 1 балл.
Если составлено уравнение, но решено не верно – 3 балла.
Верное решение – 7 баллов.

3. (Шаповалов А.В.) Раскрасьте клетки доски 5x5 в 6 цветов так, чтобы в каждом ряду из 5 клеток – по вертикали, горизонтали и диагонали – встречались клетки ровно двух цветов.

Решение. Клетки без цифр – белого цвета. Клетки с цифрами: красного, оранжевого, желтого, зеленого, синего и фиолетового.

			2	
4				
		1		
				3
	5			

Критерии: Правильная раскраска – 7 баллов, неправильная – 0 баллов.

4. (Усов С.В.) Однажды дети водили хоровод, и оказалось, что число детей, стоявших рядом ровно с одним Борисом меньше, чем число Глебов; притом любой ребёнок, не стоявший рядом с Борисом, был либо сам Борис, либо Глеб. Кого было больше в хороводе, мальчиков или девочек?

Ответ: мальчиков больше.

Решение. Все дети делятся на тех, кто стоит без Б, у кого один сосед Б и тех, кто стоит между двумя Б.

Девочек, стоящих без Б нет (потому что там только Б и Г).

Девочек между двумя Б явно меньше, чем Б (потому что у каждой девочки есть левый Б).

Девочек, у которых один сосед Б меньше, чем Г.

Значит, девочек всего – меньше чем Борисов и Глебов. А мальчиков, возможно, даже больше чем Борисов и Глебов (вдруг среди них еще Васи затесались?)

Поэтому девочек в таком хороводе меньше мальчиков.

Критерии: Если не указано, почему, девочек стоящих между двумя Борями не больше, чем Борь — штраф 1 балл. Это момент надо пояснять. (Если написано "меньше" — это вообще неправильный факт, но штраф может быть тот же).

Если все дети разбиты на категории (0 Борисов, 1 Борис, 2 Бориса) – 1 балл.

5. (Усов С.В.) Имеется мишень с 4 концентрическими кругами. Чтобы попасть в центральный 10 очковый, лучнику необходимо целиться 90 секунд, чтобы выбить 6 очков - 50 секунд, чтобы выбить 3 очка - 30 секунд, наконец чтобы выбить 1 очко - 12 секунд (прицеливание учитывает время полёта стрелы, если лучник будет целиться менее 12 секунд, то в мишень не попадет). За какое наименьшее время лучник сможет выбить ровно 125 очков?

Ответ 1052 секунд.

Решение. Три 10-очковых попадания занимают 270 секунд. Пять 6-очковых занимают 250 секунд. Таким образом в оптимальной комбинации выстрелов не может встретиться три десятиочковых (простой заменой их на 5 6-очковых уменьшим время). То есть 10-очковых выстрелов не более 2.

Три 1-очковых попадания хуже одного 3-очкового по тем же причинам. Поэтому в оптимальной комбинации не более 2 1-очковых выстрела.

Два 3-очковых не нужны по причине того, что они хуже одного 6-очкового. То есть 3-очковых не более 1.

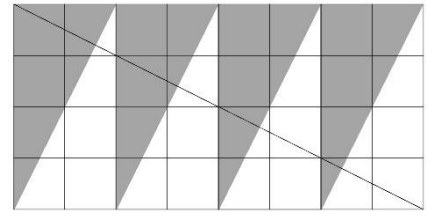
- Вариант 1. Нет 10-очковых выстрелов. Таким образом 125 очков – это 6-очковые, 3-очковые и 1-очковые. Трехочковые и шестиочковые дадут вместе сумму, которая делится на 3. Но число 125 делится на 3 с остатком 2. Поэтому только 3-очковыми и 6-очковыми не обойтись. Нужно 2 1-очковых (напомним, что 1-очковых не больше 2). Поэтому 6-очковыми и 3-очковыми надо набрать 123. Поэтому 3-очковый нужно использовать (иначе сумма будет четная). Итого: 20 6-очковых (1000 секунд), один 3-очковый (30 секунд) и два 1-очковых (24 секунды). Вместе 1054 секунды.
- Вариант 2. Один 10-очковый. 115 – это шестерками, тройками и единицами. По соображениям делимости на 3 опять получаем, что 1-очковый один выстрел. Тогда 114 надо набрать 6-очковыми и, возможно взять один 3-очковый (но его брать нельзя из-за четности). Поэтому вариант: 19 6-очковых (950 секунд), по одному 1-очковому и 10-очковому. Вместе 1052 секунд.
- Вариант 3. Два 10-очковых. Остается 105 очков. Эта сумма делится на 3, поэтому 1-очковые выстрелы тут не нужны. Поскольку сумма эта нечетная, то один 3-очковый нужен. Итого: два 10-очковых (180 секунд), один 3-очковый (30 секунд) и 17 6-очковых (850 секунд). Вместе 1060 секунд.

Из этих трех вариантов оптимальный второй.

Критерии: Если приведен правильный пример с правильным ответом — 2 балла.

Каждый из моментов "три 10-очковых делать не надо", "три 1-очковых делать не надо" и "два 3-очковых делать не надо" — по 0,5 баллов, суммируются, округляются до целого балла вверх (т.е. одно или 2 таких соображения приносит 1 балл, все три — 2 балла).

задача сведена к перебору вариантов, но некоторые варианты (не дающие правильного ответа) упущены — не более 5 баллов. Если упущен вариант, дающий правильный ответ — не более 3 баллов.

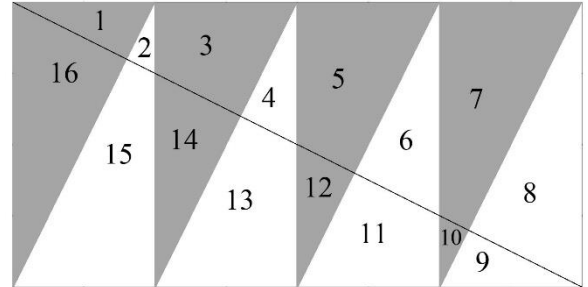


6. (Кукина Е.Г.) Красно-белый флаг разрезали по диагонали на две половины (см.рис. по клеточкам). На какой из частей красной краски больше, на верхней или на нижней?

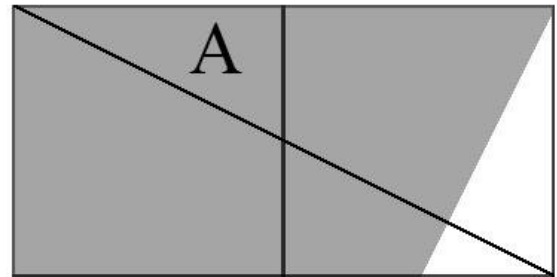
Ответ: на верхней.

Решение. Очевидно, что часть 1 равна части 9, часть 2 равна части 10, часть 3 равна части 11, 4 равна 12.

Докажем, что в верхней части красной краски больше. Для этого докажем, что в каждом из 4 прямоугольников 4×2 на которые разделен флаг, в верхней части красного больше.



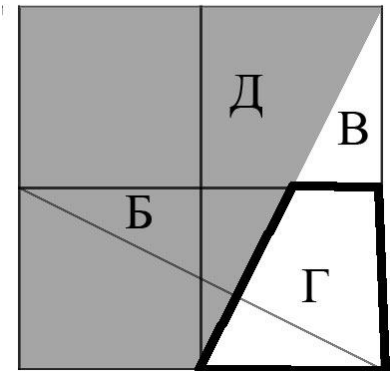
Рассмотрим части 1 и 2. (см.рис. — увеличенный кусок флага из двух клеточек). Часть 1 больше части А (потому что А — кусок от части 1). А=белому треугольнику. А этот белый треугольник больше части 2.



Рассмотрим части 3 и 4. (см. рис.3 — увеличенный кусок флага). Часть 3 больше, чем часть 3 больше части 4, так как: Часть 4 меньше, чем В и Г. Кусок Д=Г, Б=В, а часть 3 больше, чем Д и Б. Поэтому вся часть 3 больше части 4.

Дальше 5 и 6. Так как $5+12=6+11$, а 12 меньше 11, поэтому 5 больше 6. (12 меньше 11 потому что они равны частям 4 и 3 соответственно).

Дальше 7 и 8. Аналогично. $7+10=8+9$. Но часть 10 меньше части 9, поэтому 7 больше 8.



Итак, $1 > 2$, $3 > 4$, $5 > 6$, $7 > 8$. Поэтому красная часть сверху больше белой. То есть больше половины верхней части. Снизу аналогично красной краски меньше, чем на половину нижней части.

Сверху красной краски больше.

Критерии: Доказано равенство красной и белой площади на исходном флаге — ничего.

Доказано равенство белой части сверху и красной части снизу (или наоборот) — 1 балл.

Доказаны какие-то неравенства, имеющие отношение к делу — еще какие-то баллы, но тут не могу сказать точно, какие.